Revolutionen in der Mathematik:

Wissenschaftstheoretische Standpunkte

über inhaltliches und strukturelles Wachstum in der mathematischen Forschung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Bachelor-Thesis

am Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt

vorgelegt von:
Arne Seehaus

Mai 2011

Gutachter:
Prof. Dr. Martin Ziegler
Prof. Dr. Alfred Nordmann

Abstract

Wissenschaftliche Leistungen sind ein zentraler Aspekt unserer heutigen Gesellschaft und prägen unser Leben in beispielloser Weise. Seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts gilt das Interesse der Wissenschaft daher zunehmend ihrem eigenen Fortschritt, der im Rahmen der Wissenschaftstheorie und der Szientometrie systematisch untersucht wird. Zwei maßgebliche Vertreter dieser Gebiete sind Thomas Kuhn mit der Theorie wissenschaftlicher Revolutionen und Derek de Solla-Price, mit der Theorie der "Little Science" und "Big Science". Ziel dieser Arbeit ist es ihre Konzepte gezielt auf die Mathematik anzuwenden und damit eine Analyse mathematischen Fortschrittes vorzunehmen.

Der erste Teil der Arbeit befasst sich dabei mit der Frage, ob das kuhnsche Fortschrittsmodell als Beschreibung der Mathematik dienen kann und ob es wissenschaftliche Revolutionen in der Mathematik gibt bzw. gegeben hat. Es werden dazu drei historische Beispiele großer mathematischer Entwicklungen beleuchtet und auf das Vorhandensein revolutionärer Merkmale hin untersucht. Es zeigt sich, dass Revolutionen in der Mathematik auftauchen, anscheinend jedoch weniger häufig und meist schwächerer Art als in den Naturwissenschaften.

Im zweiten Teil wird geprüft, wo sich die Mathematik im Spannungsfeld zwischen klassischer Little Science und moderner Big Science befindet. Mittel, das festzustellen, werden anhand von Zitierungszahlen und anderen Korrelaten wissenschaftlicher Tätigkeit hergeleitet und angewandt. Im Ergebnis erweist sich die Mathematik als "klein" im Vergleich zu Natur- und Ingenieurswissenschaften.

Mögliche Gründe für diese Sonderstellung der Mathematik werden erörtert. Neben diesem Ergebnis liefert die Arbeit Methoden, um die Mathematik mit anderen wissenschaftlichen Diziplinen zu vergleichen. Durch deren Anwendung in zukünftigen Untersuchungen könnte das Verständnis mathematischen Fortschrittes weiter vertieft werden.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Unsere heutige Welt ist zweifelsohne stark von der Wissenschaft geprägt: Wissenschaftliche Erkenntnisse formen unser Weltbild, statten uns mit Werkzeugen aus, geben vor, wie wir uns verhalten sollen und sind Quelle von Ängsten und Träumen (Poser, 2001, S.11f). Angesichts einer so tragenden Rolle kann es nicht verwundern, dass die Wissenschaft seit jeher grundlegende Fragen an sich selbst aufwirft, etwa nach welchen Gesetzmäßigkeiten sie vorgeht bzw. vorgehen sollte, was die Bedeutung wissenschaftlichen Fortschrittes ist, vor allem aber in welche Zukunft die Wissenschaft uns führen wird. Diese Frage fasziniert den Menschen weit über die Grenzen der Philosophie hinaus und hat ein gesamtes literarisches Genre, die Science Fiction, begründet.

Etwa in den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts hat sich um diesen Themenkomplex herum eine eigene Disziplin innerhalb der Philosophie herauskristallisiert, die Wissenschaftstheorie bzw. Philosophy of Science. Die vorliegende Arbeit stellt einen mathematischen Exkurs in dieses Fachgebiet dar, der sich mit der Frage nach mathematischem Fortschritt befasst.

Fragen, die bei der Analyse wissenschaftlichen Fortschritts gestellt werden, betreffen üblicherweise dessen Bedingungen, seine Existenz und Erkennbarkeit sowie die Art und Weise, in der er sich vollzieht (Huber, 2010). Bird fasst die dazu existierenden Standpunkte wie folgt zusammen:

1. Der epistemologische Ansatz, zu dem Bird sich selbst bekennt, fasst als Fortschritt die Vermehrung von Wissen auf, das durch wissenschaftlich anerkannte Methoden gewonnen wurde.
2. Der semantische Ansatz, dem zum Beispiel Popper zugerechnet wird, definiert Fortschritt als zunehmende Annäherung des Erkenntnisstandes an die tatsächliche Wahrheit.

Diese beiden Ansätze sind sich insofern ähnlich, als Wissenschaft auf der gleichen Skala eines zunehmenden Kenntnisstandes betrachtet wird. Der Unterschied liegt im Standpunkt des Beobachters, der bei den Epistemologen am Ursprung, bei den Semantikern dagegen am Endpunkt dieser Skala liegt.

3. Der funktionalistische Ansatz dagegen verzichtet ganz auf Aussagen über Wissen und Wahrheit und definiert Fortschritt über seinen Nutzwert, d.h. über Probleme, die mittels wissenschaftlicher Erkenntnisse gelöst werden können.

Neben dieser klassisch philosophischen Betrachtungsweise entstand etwa zur gleichen Zeit noch eine weitere Disziplin, die man vielleicht als den "quantitativen Flügel" der Wissenschaftstheorie bezeichnen könnte. Es handelt sich dabei um die Szientometrie (Scientometrics), die sich mit der Vermessung der Wissenschaft in Bezug auf unter anderem ihre Größe, ihr Wachstum oder ähnliche Merkmale befasst.

Autoren beider Gebiete veranschaulichen ihre Theorien zumeist an Beispielen aus den Naturwissenschaften, vermutlich da diese Beispiele sehr plastisch sind und der Naturwissenschaftler dem geläufigen Bild eines Forschers am nächsten kommt. Gegenüber diesen klassischen "Sciences" nimmt die Mathematik allerdings eine Sonderstellung ein. Zwar forscht sie letzten Endes am selben Gegenstand - unserer Welt und der ihr innewohnenden Zusammenhänge - sie geht dabei jedoch nicht empirisch vor. Daher können Fragen nach Wissenzuwachs, Richtigkeit oder Wahrheit hier durchaus eine andere Bedeutung haben.

Das Ziel dieser Arbeit ist es demgemäß, den Fragen nach dem Wie, Warum und Wohin des Fortschritts explizit in der Mathematik nachzugehen und zu prüfen, inwieweit tragende Konzepte der

Wissenschaftstheorie auf sie anwendbar sind. Wir verfolgen dieses Vorhaben in zwei Teilen: Der erste Part der Arbeit dreht sich um die klassische Philosophy of Science, wobei wir uns vorrangig mit der Fortschrittstheorie von Thomas Kuhn befassen werden. Konkret setzen wir uns mit der kuhnschen Vorstellung auseinander, Wissenschaft verlaufe zyklisch in Phasen regulärer Wissensvermehrung, wissenschaftlicher Krisen und Revo-lutionen. Wir wollen prüfen, ob diese Sichtweise als Modell für mathematischen Fortschritt geeignet ist und fragen, ob es radikale Umbrüche in der mathematischen Welt geben kann bzw. bereits gegeben hat. Im zweiten Part werden wir uns der Szientometrie und der Arbeit Derek J. de Solla Price‘ als ihrem Begründer widmen. In seinem 1963 erschienenen Hauptwerk *Little Science, Big Science* trifft er einige weitreichende Vorhersagen über die strukturelle Zukunft der Wissenschaft. Wir werden prüfen, ob diese Thesen sich 50 Jahre später bewahrheitet haben und wie es um sie im wissenschaftlichen Umfeld der Mathematik bestellt ist.
In der abschließenden Diskussion werden wir versuchen, gemeinsame Schlüsse aus beiden Teilen zu ziehen und die Relevanz dieser Erkenntnisse für die Mathematik und die Wissenschaftstheorie selbst erörtern.

1. Kuhns wissenschaftliche Revolutionen

1.1. Einleitung

Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen, in ihrer Erstfassung 1962 erschienen (eine inhaltlich revidierte Fassung erschien 1970), stellt Kuhns Hauptwerk dar. Darin analysiert Kuhn die Geschichte wissenschaftlichen Fortschritts und leitet daraus verschiedene Gesetzmäßigkeiten ab, nach denen dieser verläuft. Als Beispiele für seine Theorie dienen verschiedene wissenschaftliche Umbrüche in den letzten Jahrhunderten abendländischer naturwissenschaftlicher Forschung.
Das wohl wichtigste Konzept in Kuhns Theorie ist das von Paradigma und Paradigmenwechsel: Unter dem inzwischen weit geläufigen Begriff Paradigma wird eine Gesamtheit aus grundlegenden Theoriegebilden, Problemstellungen, Lösungsansätzen und Weltanschauungen verstanden, durch die sich eine Fachdisziplin definiert und die der Forschung damit einen Leitfaden gibt.
Wissenschaftlicher Fortschritt in Kuhns Modell stellt einen immer wiederkehrenden Wechsel zwischen zwei verschiedenen Phasen dar: Die erste ist die der sogenannten Normalwissenschaft, in der das vorhandene Wissen einer Fachdisziplin benutzt wird, um systematisch Fragen und Problemstellungen zu generieren und sie mit den zur Verfügung stehenden Methoden zu lösen. Es entstehen hieraus neue Fragestellungen und Methoden und der Vorgang wiederholt sich. In dieser Phase bestimmt das Paradigma die Wissenschaft und generiert kontinuierlichen Fortschritt. Die wahrhaft bedeutenden Umbrüche finden nach Kuhn aber innerhalb der zweiten Phase statt: Zeitweise kommt es zu Episoden, in denen eine Fachdisziplin bzw. ihr Paradigma an die Grenzen ihrer Kapazitäten stößt, zunächst sichtbar am vermehrten Auftauchen unlösbarer Probleme und Anomalien. Können diese zunächst noch ignoriert oder behelfsmäßig „geflickt“ werden, weitet sich der Problemkern aus und stürzt die Disziplin in eine wissenschaftliche Krise. Charakteristisch für eine solche Krise ist die Auftrennung der Fachdisziplin in verschiedene Schulen, von denen sich nach einiger Zeit eine durchsetzt und der Disziplin ein neues Paradigma gibt. Diesen Vorgang nennt Kuhn wissenschaftliche

Revolution, da sich die Wissenschaft unter dem neuen Paradigma grundlegend verändert hat und ein großer Teil der vorherigen Sichtweisen und Erkenntnisse verworfen oder revidiert werden müssen. Die Unterschiedlichkeit beider Paradigmen geht im Modell sogar so weit, dass ihre Inhalte in keiner Weise mehr vergleichbar sind - Kuhn nennt dies die Inkommensurabilität von altem und neuem Paradigma. Am Ende der Revolution schließlich tritt eine neue Ära der Normalwissenschaft ein und der Kreislauf beginnt von neuem.
Die zweite Phase ist in Kuhns Modell die wichtigere Quelle des Fortschritts. Gegenüber der Normalwissenschaft, die mehr oder weniger eine Fleißarbeit darstellt, erschafft die Revolution neues Wissen, räumt mit den Fehlern der Vergangenheit auf und verhilft der Fachdisziplin auf ein qualitativ höheres Niveau.
Kuhn belegt seine Ausführungen mit zahlreichen Beispielen, von denen die am detailliertesten ausgearbeiteten die Übergänge von ptolemäischem zu kopernikanischem Weltbild, von Phlogiston- zu lavoisierscher Sauerstofftheorie und von newtonscher zu einsteinscher Physik sind. Wegen dieses Schwerpunktes auf den klassischen Naturwissenschaften liegt die Frage nahe, ob die Konzepte auch auf die Mathematik übertragen werden dürfen, die ja einerseits eine Geisteswissenschaft darstellt, andererseits wie kaum eine andere Wissenschaft beweis- statt erfahrungsbasierend arbeitet. Wir wollen also prüfen, ob wir auch in der Geschichte der Mathematik die beschriebenen Revolutionen vorfinden und ob sie nach den gleichen Gesetzmäßigkeiten ablaufen. Dazu betrachten wir zunächst die Reaktionen, die Kuhns Werk seither erfahren hat.

1.2. Reaktionen auf Kuhn

Zweifelsohne war die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen derart wichtig für die Wissenschaftstheorie, dass sie selbst als paradigmatisch auf diesem Gebiet gesehen werden kann (Poser, S.142f). So prägt auch das Modell von Paradigma und Paradigmenwechsel bis heute die Betrachtung von Wissenschaft und Fortschritt. In vielen Punkten wurde das Modell jedoch kritisiert und infolgedessen modifiziert bzw. relativiert. Den ersten Hauptkritikpunkt bildet die Radikalität der Kuhnschen Thesen: Die Begriffe „Krise“ und „Revolution“ lassen ein Bild vom wissenschaftlichen Alltag entstehen, das von vielen Wissenschaftlern nicht geteilt wird. Auch die These der Inkommensurabilität von altem und neuem Paradigma ist in letzter Konsequenz vermutlich nicht haltbar. Ein prä- und ein posteinsteinscher Physiker können sich eben doch über Raum und Zeit unterhalten, auch wenn sie ihr Forschungsobjekt im Detail anders wahrnehmen. Als zweiten Punkt wurde die Irrationalität des Kuhnschen Fortschritts kritisiert: Genau aus der völligen Unvereinbarkeit alter und neuer Paradigmata folgt nämlich, dass die Wahl des neuen Paradigmas durch die wissenschaftlichen Anwender des alten notwendigerweise nicht nach wissenschaftlichen Kriterien geschehen kann. Kuhn nennt vielmehr die Überzeugungskraft der Anwärter des neuen Paradigmas als das Hauptkriterium dafür, welches sich letzten Endes durchsetzt. Damit erhält die Richtung des Fortschritts eine gewisse Willkür, die vor allem dem Weltbild der Epistemologen fundamental widerspricht (siehe Einleitung).
Weiterentwicklungen des Kuhnschen Konzeptes, die diesen Punkten Rechnung tragen, findet man unter anderem bei Lakatos und Laudan. Die Arbeit Lakatos ist dabei besonders hervorzuheben, da er sich explizit auch mit der Mathematik befasst. In dem Werk *Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes* differenziert er den wissenschaftlichen Fundus einer Fachdisziplin in einen "harten Kern" und

einen darum wachsenden Ring aus Hilfshypothesen. Während Ersteres ziemlich genau dem Kuhnschen Paradigma entspricht, stellt Zweiteres eine Ausarbeitung der Reaktion auf auftretende Anomalien dar. Tritt ein Ereignis auf, das vom Kern nicht erklärt werden kann, so kann er um eine Hilfshypothese erweitert werden, die den neu geschaffenen Fall abdeckt. Ist auch das nicht möglich, so bleibt nur noch das Ausklammern des Gegenstandsbereichs der Anomalie übrig. Diese sogenannte degenerative Problemverschiebung (als Gegenpart zu der konstruktiven Problemverschiebung durch Hilfshypothesen) führt mit der Zeit zur Aushöhlung des harten Kerns, bis dieser schließlich nicht mehr geeignet ist, als Forschungsgrundlage zu dienen. Ein revolutionärer Umsturz kann jetzt einsetzen, muss aber nicht, nämlich dann nicht, wenn eine andere, bisher weniger erfolgreiche Schule die Problematik besser bewältigen kann und dadurch den neuen Leitfaden der Disziplin bildet. Diese Entwicklung sieht Lakatos als optimal an und tritt dementsprechend für einen ständigen Methodenpluralismus innerhalb der Wissenschaft ein. Voraussetzung für eine solche Sichtweise ist ebenfalls die Ablehnung einer starken Inkommensurabilität, sodass ein mehr oder weniger stetiger Übergang von einem zum nächsten Kern möglich ist.
Betrachten wir nun die Reaktionen, die Kuhn unmittelbar auf die Mathematik bezogen erfahren hat.

1.3. Kuhn in der Mathematik

Zwei frühe Werke, die aus mathematischer Sicht Bezug auf Kuhns Thesen nehmen, sind das Paper *Kuhn's Theories and Mathematics* (Mehrtens, 1976) und die viel zitierten *Ten Laws Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics* (Crowe, 1975). Beide Autoren vertreten den Standpunkt, fundamentale Krisen kuhnscher Art seien in der Geschichte der Mathematik nicht vorhanden. Vielmehr, so Crowe, stehen der Mathematik derart formale Problemstellungen und Lösungsstrategien zur Verfügung, dass ein vollkommen standardisierter Umgang mit Krisen möglich ist. Jegliche Revolutionen finden somit nicht in der Mathematik selbst, sondern in Äußerlichkeiten wie etwa Schreibweisen, Widerlegung einzelner Sätze o.ä. statt. Mehrtens greift diese Sichtweise auf und ergänzt sie um einige praktische Aspekte wie etwa die Größe der Mathematik im Vergleich zu anderen Disziplinen sowie ihren Anwendungserfolg. Beides trägt dazu bei, dass Probleme nur auf Teilbereiche der Mathematik begrenzt bleiben und selbst wenn sie sich als sehr hartnäckig erweisen, im Zweifelsfall einfach ignoriert bzw. vertagt werden können. War die Reaktion der Mathematik also zunächst die Ablehnung von Kuhns Thesen, findet man in jüngerer Zeit auch anders lautende Sichtweisen. Pourciau etwa vertritt die Meinung, dass fundamentale Krisen in der Mathematik sehr wohl möglich, wenn auch eventuell noch nie aufgetreten sind. Den Grund dafür sieht er dabei eher in der Weigerung der von einer Krise Betroffenen, sich diese einzugestehen, als in der grundsätzlichen Resistenz der Mathematik gegen Krisen. So kommt er denn auch zu dem Schluss, dass eine fundamentale Krise der Mathematik für die nächste Zukunft ausstehe und in einem revolutionären Wechsel hin zur intuitionistischen Mathematik gipfeln müsse. Diese doch sehr eindeutige Stellungnahme lässt Pourciaus Werk in weniger seriösem Licht als das seiner Vorredner erscheinen, als Beispiel für eine pro Kuhnsche Sichtweise verdient er es aber durchaus hier Erwähnung zu finden.
So verschieden beide genannten Standpunkte auf den ersten Blick seien mögen, haben sie doch eine wesentliche Gemeinsamkeit. In der Betrachtung von Revolutionen bewegen sie sich sehr nahe am Original:

Unter Revolution wird ein fundamentaler, weitreichender Umsturz verstanden. Lässt man diese strenge Definition fallen, stößt man auf wesentlich breitere Zustimmung zur Idee mathematischer Revolutionen, wie etwa Gillies in *Revolutions in Mathematics* zusammenfasst. Er selbst unterscheidet hier zwischen zwei Typen von Revolutionen: Den radikalen, alles umstürzenden auf der einen und einer Klasse gemäßigter Revolutionen auf der anderen Seite, bei denen alte Ansichten eher überholt als völlig verworfen werden. Die einsteinsche Revolution könnte als Paradebeispiel hierfür dienen, wird doch die Newtonsche Physik heutzutage als Spezialfall dieser umfassenderen Theorie gesehen. In Anlehnung an die europäische Geschichte bezeichnet Gillies die beiden Revolutionstypen als russisch (der Zar wird gestürzt und es wird niemals wieder einen geben) bzw. franko-britisch (auf den Sturz folgt die Restauration, aus der die Monarchie in neuem und weniger bedeutendem Gewand wieder hervorgeht). Während Erstere, so Gillies, ausschließlich in den Naturwissenschaften auftauchen, lassen sich Zweitere durchaus auch in der Mathematik finden. Als Beispiele für gemäßigte Revolutionen wären etwa der Übergang zur nichteuklidischen Geometrie oder die Einführung der Infitesimalrechnung durch Fontenelle zu nennen. Die zahlreichen in dem Buch vereinten Vertreter eines gemäßigten Kuhnschen Konzeptes müssen hier nicht einzeln vorgestellt werden. Ihnen gemein ist entweder eine differenzierte Sicht des Revolutionsbegriffes (z.B. Gillies selbst), oder aber des Wirkungsbereiches der Revolutionen. Dunmore beispielsweise unterscheidet zwischen Objekt- und Metaebene der Mathematik, von denen nur die Metaebene der mathematischen Weltanschauung wirkliche Krisen und Revolutionen erfahren kann. Die auf der Objektebene angesiedelten Sätze, Definitionen, Beweise etc. sind dagegen, sofern sie nicht nachweislich fehlerhaft sind, krisensicher und können allenfalls unter einem neuen Paradigma zum Spezialfall degradiert werden. Auch Lakatos mit dem Hilfshypothesenring neben dem krisensicheren harten Kern fällt in diese Kategorie.

Vor dem Hintergrund dieser drei wesentlichen Standpunkten zu mathematischen Revolutionen (kategorische Ablehnung, kategorische Zustimmung, gemäßigt) wollen wir eine eigene Analyse ausgewählter Epochen des mathematischen Fortschritts vornehmen und prüfen, wo wir Anhaltspunkte für oder gegen die verschiedenen Auffassungen von Krise und Revolution finden.

1.4. Historische Kandidaten mathematischer Revolutionen

1.4.1. Irrationalität

Den zeitgeschichtlich frühesten Kandidaten einer mathematischen Krise finden wir im antiken Griechenland der Zeit um etwa 400 v. Chr.. Das zu dieser Zeit in der Philosophie als der alleinigen wissenschaftlichen Disziplin vorherrschende Weltbild war das der Pythagoräer: „Alles ist Zahl“. Man versuchte damals, möglichst alle wissenschaftlichen Sachverhalte durch ganze Zahlen und deren Verhältnisse auszudrücken. Die Bestätigung, dass dadurch eine Beschreibung der gesamten Welt prinzipiell möglich sei, fand man beispielsweise in der mathematischen Analyse der Musik. Die Anschauung geriet jedoch ins Wanken, als, so zumindest die Überlieferung, Hippasus von Metapont bei der Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks erstmals auf nicht rationale Verhältnisse stieß. Die Entdeckung weitete sich schnell zu einer Krise der Weltanschauung aus, gab es doch nun ein elementar mathematisches Phänomen, das eindeutig „nicht Zahl“ war. Es sollte einige Jahrzehnte dauern, bis Theaetetus und Eudoxus begannen, mit diesen inkommensurablen

Größen zu rechnen und somit das Problem durch Integration in die bisherige Mathematik lösten. Es sei hier angemerkt, dass das noch bei weitem nicht die Einführung der irrationalen Zahlen bedeutete. Es herrschte weiterhin eine Trennung zwischen (rationalen) Zahlen und (jetzt auch irrationalen) Längen bzw. Größen, die erst im späten 19. Jahrhundert durch Dedekinds Werk *Continuity and irrational numbers* aufgehoben wurde.
Es fällt nicht schwer, in dem hier skizzierten Verlauf die Stadien von Kuhns Fortschrittszyklus wiederzufinden: Eine Anomalie (Entdeckung irrationaler Größen) führt zur Krise und schließlich zu einer mehr oder weniger revolutionär anmutenden Lösung. Neben den zahlreichen Befürwortern dieser Sichtweise (von Fritz, 1945, Dauben, 1984, Dunmore, 1992) gibt es jedoch auch kritische Stimmen, wie etwa Knorr (2001), der vor einer falschen Interpretation warnt: Vor allem die einseitige Überlieferung durch Plato und die psychologische Wirkung zeitgenössischer mathematischer Krisen könnten zu einem verzerrten Bild führen ("cave modernum, cave Platonicum"). Wir werden diese Kritikpunkte an späterer Stelle erneut aufgreifen.

1.4.2. Fundierungskrise der Logik

Kommen wir von der Antike in die Neuzeit und betrachten nun ein Ereignis der jüngeren Geschichte, das eine der bis dato tiefgreifendsten Veränderungen der mathematischen Welt mit sich brachte. Es handelt sich dabei um eine Debatte um die logischen Grundlagen der Mathematik, die im beginnenden 20. Jahrhundert in Kreisen der Logik und der reinen Mathematik intensiv geführt wurde. Ihren Anfangspunkt kann man zeitlich etwa auf das Jahr 1903 und die Veröffentlichung des Russellschen Paradoxons datieren. Dieses Paradox stellt, kurz gefasst, die Frage, ob die Menge aller sich selbst nicht enthaltenden Mengen sich selbst enthalte. Beantwortet man diese Frage mit ja, so enthält die Menge sich selbst und enthält sich somit per def. wieder nicht. Antwortet man dagegen nein, so folgt aus der Definition unmittelbar, dass die Menge sich eben doch enthält. Dieses Problem, das in unterschiedlicher Erscheinungsform auch von einigen anderen Zeitgenossen Russells veröffentlicht wurde, zeigte einen Widerspruch in der naiven Mengenlehre Cantors und Freges auf und verlangte zunächst nach einer Ausbesserung dieses grundlegenden Systems. Eine solche Lösung wurde von Russell selbst durch seine Typentheorie und etwas später auch durch die Zermelo-Fränkel-Axiome gegeben. Beide Systeme haben sich etabliert und finden bis heute Anwendung als logische Grundlagensysteme, sodass das ursprüngliche Problem an dieser Stelle bereits als gelöst betrachtet werden kann. Die durch die Ereignisse angestoßene Problematik war jedoch tiefgreifender, da sich nun die Frage nach der Vollständigkeit und der Widerspruchsfreiheit in der Mathematik benutzter Axiomensysteme stellte. Aus diesem Misstrauen gegenüber den mathematischen Grundlagen entwickelten sich in den 1910er und 20er Jahren im Wesentlichen drei Ansätze zu einer neuen Fundierung der Mathematik: Erstens das Hilbertprogramm. Hilbert war mit den 1899 veröffentlichten *Foundations of Geometry*, in der er unter anderem die axiomatische Methode propagierte, und mit den berühmten 23 Fragen anlässlich des Internationalen Mathematikerkongresses 1900 in Paris, eine treibende Kraft in der damaligen Entwicklung der Logik und Mathematik gewesen. Er strebte eine Fundierung der Mathematik gemäß den Grundsätzen eines strengen Formalismus und Finitismus an: Primäre Objekte der Mathematik wären demnach nur an sich inhaltsleere Zeichen, die nach bestimmten Gesetzen verkettet werden können und für die man gewisse Axiome aufstellt (Formalismus). Aus diesen Axiomen sollte die gesamte Mathematik mit endlichen Beweisen abgeleitet werden

(Finitismus). Einen ähnlichen Ansatz vertrat der durch Frege und Russell propagierte Logizismus, der ebenfalls eine Rückführung auf formale Axiome vornimmt, jedoch unter der Bedingung, dass alle Axiome logisch evident sein müssen. Einen von diesem Konzept stark abweichenden und ebenfalls zeitweise sehr populären Gegenstandpunkt dazu stellte der Intuitionismus, angeführt von Brouwer dar: Ihm zu Grunde liegt die philosophische Prämisse, dass unsere Welt letztlich eine Konstruktion des Geistes darstellt. Mathematisch wahr bzw. valide kann daher nur das sein, was mit dem Geist intuitiv verständlichen Methoden konstruiert werden kann. Insbesondere bedeutet das die strikte Verneinung des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten und einer Implikation des Unendlichen in jedweder Beweisführung.

Seine endgültige Lösung fand das Problem erst in Gödels 1933 veröffentlichtem Unvollständigkeitssatz, der die logische Sprache selbst zum Gegenstand einer Beweisführung macht und damit die Unvollständigkeit jedes hinreichend komplexen logischen Systems zeigt. Der Satz stellt eine Widerlegung aller geschilderten Ansätze dar, lässt sich seiner Argumentationslogik nach aber im weitesten Sinne dem Umfeld des Hilbertprogramms zuordnen.

Betrachten wir auch diese Ereignisfolge mit den von Kuhn gelieferten Konzepten, so sehen wir eine deutliche Übereinstimmung von Theorie und wissenschaftlicher Realität: Um die Jahrhundertwende war die mathematische Logik sehr von dem Ziel bestimmt, die gesamte Mathematik auf eine überschaubare Grundlage zu stellen, die vornehmlich in der Mengenlehre gesucht wurde. Das damals vorherrschende Paradigma kann man also grob als die (mengentheoretische) Axiomatisierung der Mathematik benennen. Durch verschiedene zu Beginn des 20. Jhdts. auftauchende Anomalien, v.a. der Russellschen Antinomie, zeigten die paradigmatischen Systeme Lücken, die zwar gestopft werden konnten (Typentheorie), ohne dabei jedoch das Kernproblem zu lösen. Die auftretende Krise, die damals tatsächlich als solche wahrgenommen wurde (der Intuitionist Weyl spricht 1920 von der "neuen Grundlagenkrise der Mathematik"), führte zur Bildung verschiedener Schulen (Logizismus, Finitismus, Intuitionismus) und schließlich zur Lösung und Herausbildung des neuen Paradigmas der Unvollständigkeit.

1.4.3. Axiomatik der Stochastik

Mit den ersten beiden Fällen haben wir historische Fälle betrachtet, die bereits einschlägig als Kandidaten für kuhnsche Revolutionen bekannt sind und diskutiert wurden. Als drittes Anschauungsobjekt soll eine mathematische Entwicklung dienen, die, obwohl inhaltlich gravierend, aus Sicht der Wissenschaftstheorie bisher unscheinbar geblieben ist. Wir finden einen solchen Fall in der Stochastik der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Er ist für unsere Überlegungen besonders interessant, da er, wie wir sehen werden, einer zielgerichteten Suche nach einem Paradigma gleichkommt, die in Kolmogoroffs *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* ihr bis heute gültiges Ziel fand.

Der Ausgangspunkt dieser Episode ist wieder die Zeit um die Jahrhundertwende zum 20. Jahrhundert. Bis dato arbeitete die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit den im beginnenden 18. Jahrhundert vornehmlich durch de Moivre und Bernoulli gelegten Grundlagen. Wahrscheinlichkeit wurde also als Anzahl günstiger durch Anzahl möglicher Ereignisse definiert. Bereits im Verlauf des 19. Jahrhunderts stieß dieser naive Wahrscheinlichkeitsbegriff bei der Betrachtung sehr kleiner Wahrscheinlichkeiten vermehrt an seine

Grenzen. Es entstand eine allgemeine Verunsicherung über den benutzten Wahrscheinlichkeitsbegriff, die sich unter anderem im 1889 von Betrand veröffentlichten Kugelparadox deutlich manifestierte (Das Paradox ermittelt auf zwei gleichermaßen plausibel erscheinende Arten zwei verschiedene Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis, dass ein zufällig auf die Erde einschlagender Komet in einer Entfernung kleiner gleich x zum Eiffelturm landet). Auch die zu dieser Zeit aufkommende Quantenphysik sah sich mit ungenügenden Methoden ausgestattet, um neu auftretende physikalische Probleme mit stochastischen Mitteln zu bearbeiten. Wiederum war es Hilbert, der die Problematik verdeutlichte, indem er die sechste seiner 23 Fragen einer Axiomatisierung der Stochastik und der theoretischen Physik widmete. Die Frage stieß auf großen Widerhall, sodass eine ganze Reihe damaliger Theoretiker schrittweise eine Lösung des Problems erarbeiteten. Aufbauend auf der zu dieser Zeit entwickelten Maßtheorie Lebesgues wurden dessen Konzepte durch u.a. Radon, Nikodym, Frechet und Borel verallgemeinert und auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung übertragen. Kolmogoroff schließlich nutzte diese Vorarbeit, um mit seinem in den Grundbegriffen veröffentlichten Axiomensatz die aufgeworfene Frage 33 Jahre später präzise zu lösen (Shafer & Vovk, 2006).

Diese Abfolge aufeinander aufbauender Entwicklungen stellt meiner Ansicht nach genau die Art stetigen Fortschrittes dar, wie sie laut Kuhn eine nachträgliche Verfälschung und Schönmalerei von Wissenschaftshistorikern und Lehrbuchautoren ist. Klar mit Kuhn in Einklang zu bringen ist noch der Verlauf im 19. Jahrhundert, wo diverse Mängel im geltenden wissenschaftlichen Kanon das Fachgebiet in Unsicherheit werfen und eine gewisse Krisenstimmung erzeugen. Auch findet man hier die charakteristische Schulenbildung in Form von u.a. Frequentisten (Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeit) und Bayesianern (Wahrscheinlichkeit als Maß der subjektiven Unsicherheit über den Ausgang eines Ereignisses) wieder.

Der weitere Verlauf aber entfernt sich vom Modell. So gibt es keine deutlichen Hinweise auf einen willkürlichen Sieg einer der Schulen über die anderen. Stattdessen scheint die Maßtheorie der Stochastik ein entscheidendes Werkzeug geschenkt zu haben, mit dem diese sehr strukturiert und planmäßig an der Lösung des Rätsels weiterarbeiten konnte, die schließlich auch einhellig anerkannt wurde. Auch hat es offensichtlich keine völlige Entwertung des vorherigen Standpunktes gegeben, da im Gegensatz etwa zur Phlogistontheorie der laplacesche Wahrscheinlichkeitsbegriff heute nach wie vor seinen Gültigkeitsbereich hat und noch immer die Definition von Wahrscheinlichkeit darstellt, mit der Anfänger an die Materie herangeführt werden.

Die Annahme einer radikalen Revolution wird zumindest in den hier betrachteten Quellen nicht gestützt. Den Wandel des laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriffes durch die Krise hindurch zum Spezialfall eines neuen umfassenderen Paradigmas kann somit allenfalls als Beispiel einer gemäßigten "franko-britischen" Revolution gesehen werden. Wir werden im nächsten Kapitel jedoch noch ausführlicher diskutieren, welche Schlüsse aus diesem und den beiden anderen betrachteten Beispielen zu ziehen sind.

1.5. Diskussion

1.5.1. Rückgriff

Es sollen nun die gesammelten Erkenntnisse aus den betrachteten Fallbeispielen angewandt werden, um zunächst der Frage nachzugehen, welchen der eingangs geschilderten Standpunkte zu kuhnschen Revolutionen wir bestätigen können.

Fassen wir daher zusammen:

1. Die Entdeckung irrationaler Größenverhältnisse in der Antike stellt, wenn auch auf Grund begrenzter Quellen strittig, vermutlich eines der ältesten Beispiele einer wissenschaftlichen Krise dar. Ihre Lösung, die innerhalb etwa eines halben Jahrhunderts erarbeitet wurde, kann als revolutionär gesehen werden, da sie einen neuen, bisher nicht dagewesenen Abstraktionsgrad in die damalige Geometrie einbrachte (das Arbeiten und Rechnen mit Größen, die keine Repräsentation als Zahl hatten) und vor allem mit dem vorherigen philosophischen Paradigma, dem pythagoräischen Weltbild, inkommensurabel war.
2. Die mathematische Logik des beginnenden 20. Jahrhunderts erlebte mit dem Einsturz der naiven mengentheoretischen Grundlagen des 19. Jahrhunderts eine Krise, deren Lösung insofern als Revolution gelten kann, als sie alle bisher existierenden Ansätze widerlegt. Da sie das allerdings in einer Argumentationsweise tat, wie sie zumindest dem Hilbertschen Ansatz wohlbekannt war, ist es fraglich, ob die postgödelsche Logik und das Hilbertprogramm tatsächlich gänzlich verschiedener Natur sind.
3. Die Stochastik kriselte während des 19. Jahrhunderts an in die Jahre gekommenen Grundlagen, die zur Bearbeitung neu aufkommender Probleme, unter anderem aus der Physik, nicht mehr geeignet waren. Es wurde daher eine gezielte Problemstellung formuliert, die nach einigen Jahrzehnten Arbeit in die gewünschte Lösung mündete. So verschaffte diese Disziplin sich ein neues Paradigma, innerhalb dessen das alte einen Spezialfall darstellt.

Was man dieser Darstellung klar entnehmen kann ist, dass die von Kuhn definierten Begrifflichkeiten tatsächlich alle in der einen oder anderen Form in der Geschichte der Mathematik auffindbar sind. Daraus den Schluss zu ziehen, dass die Mathematik generell in dem von Kuhn modellierten Zyklus von Normalwissenschaft - Krise - Revolution voranschreitet, wäre jedoch falsch. Unter den hier betrachteten Beispielen finden wir keines, in dem die Revolution und die damit verbundene Unvereinbarkeit von Altem und Neuem derart gravierend ausfällt, wie es in Kuhns Musterbeispielen etwa vom Phlogiston der Fall ist. Im Gegenteil - das Beispiel der Stochastik lehrt uns die Existenz von Episoden des mathematischen Fortschritts, die zwar zu problem- und krisenreich sind, um als Normalwissenschaft zu gelten, allerdings auch zu geordnet in ihrem Ablauf, als dass man von einer Revolution sprechen könnte.

Aber auch denjenigen wie Crowe, die der Mathematik in Kuhns Folgezeit eine generelle Krisen- und Revolutionsimmunität bescheinigen, erteilen die geschichtlichen Fakten eine Absage. Wir haben gesehen, dass es auch in der Mathematik wiederholt passiert, dass ein Paradigma an seine Grenzen stößt - sei es allmählich, wie im Fall der Stochastik, oder aber durch relativ unverhofft entdeckte Anomalien, Widersprüche o.ä. wie im Fall der irrationalen Größen und der logischen Fundierungskrise. Die Reaktionen der mathematischen Welt auf solche Entwicklungen und Ereignisse hatten dabei durchaus revolutionäre Züge, wenn auch nicht in einem Ausmaß, wie man es aus den Darstellungen Kuhns erwarten könnte.

Damit sind wir am Ergebnis unserer Analyse an dem Punkt angelangt, dass wir uns in das Umfeld derjenigen Vorredner einordnen können, die einen Mittelweg suchen zwischen der kategorischen Annahme und Ablehnung von mathematischer Krise und Revolution. Einige dabei vertretbare Thesen lauten nochmals zusammengefasst:

1. mathematische Revolutionen sind vergleichsweise schwach, nicht radikal umstürzend
2. mathematische Revolutionen wirken sich nicht auf die gesamte Mathematik aus, sondern auf Teilbereiche
3. mathematische Revolutionen maximalen Ausmaßes sind bisher noch nicht aufgetreten

Jeden dieser Standpunkte nun im Detail aufzugreifen und gegeneinander abzuwägen, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Wir beschränken uns an dieser Stelle daher darauf, das Gemeinsame dieser Standpunkte herauszustellen, nämlich, dass bisherige mathematische Krisen und Revolutionen nicht so umwälzend ausfallen wie das in den Naturwissenschaften der letzten Jahrhunderte zu beobachten war. Die Mathematik scheint gegenüber solchen Umbrüchen, wenn auch nicht immun, so doch zumindest in gewissem Maße resistent zu sein. Damit stellt sich natürlich unmittelbar die Frage nach den Gründen für diese Resistenz. Diese Frage soll im letzten Kapitel dieser Arbeit erörtert werden.

1.5.2. Die Mathematik als "krisensichere" Wissenschaft

Lavoisier warf also die Phlogistontheorie über den Haufen, Kopernikus räumte mit dem lange überkommenen Weltbild des Ptolemäus auf und Einstein setzte dem Glauben an einen mechanischen Äther ein Ende. Verglichen mit solch einschneidenden Zäsuren wirkt selbst der gödelsche Unvollständigkeitssatz als Ende ihrer vielleicht schwersten Krise eher glimpflich. Worin begründet sich also die offensichtliche Standfestigkeit, mit der sich die Mathematik vor den Naturwissenschaften auszeichnet, deren Theoriegebilde scheinbar immer wieder in sich selbst zusammenfallen?

Ein gewichtiger Grund dafür liegt meiner Meinung nach im Gegenstandsbereich und daraus folgend den potentiellen Auslösern einer Krise in der Mathematik verglichen mit den Naturwissenschaften. Letztere haben als Anschauungsobjekt die Welt, wie sie sich uns durch unsere Sinne offenbart und wie sie unabhängig von unserer Forschung existiert. Alle Bemühungen der Naturwissenschaften äußern sich damit in Modellen, die bestrebt sind, die Welt immer präziser zu beschreiben. Eine perfekte Beschreibung wurde dabei bisher nicht gefunden und wird wohl auch nie gefunden werden. Ob es nun überhaupt eine Allwahrheit in dieser Welt gibt und ob die Naturwissenschaften sich auf diese zubewegen oder nicht, sei einmal dahingestellt. Sicher ist aber, dass es keinen Zeitpunkt in der Geschichte der Naturwissenschaften gegeben hat, in der es keine unerklärlichen Phänomene gab, die die gerade vorherrschenden Theorien und Modelle auf die Probe stellten. Was passieren muss, damit ein naturwissenschaftliches Fach eine Krise erfährt, ist damit lediglich eine derartige Anhäufung solcher Gegenbeispiele, dass das Paradigma unter ihrer Last zerbröckelt. Angesichts des steten Forschungseifers des Menschen ist das nur eine Frage der Zeit.

Anders sieht das in der Mathematik aus: Im Kern eine Geisteswissenschaft, stellt sie ihre Probleme gewissermaßen aus sich selbst auf, ohne dabei in einem vergleichbaren "Kampf" mit ihrer Außenwelt zu stehen.

Im Bereich der reinen Mathematik ist das unmittelbar einleuchtend. Damit ein Fach wie die mathematische Logik, die quasi ins Vakuum hinein Axiome und Regeln entwirft und mit diesen operiert, in eine Krise gerät, muss der Fehler bereits in den Axiomen liegen. Es gibt keine Restriktionen oder Zwänge, an denen die Disziplin sich messen muss, sondern die Herausforderung liegt mehr oder weniger darin, von einer selbst gesetzten Basis aus zu den Lösungen selbst gesetzter Probleme zu gelangen. Die damit einhergehende Inertheit gegenüber krisenhaften Ereignissen fordert jedoch ihren Preis, wie wir an der Grundlagenkrise gesehen haben. Eine Wissenschaft, die sich an keinen realen Erfahrungen, an keinen Naturgegebenheiten misst, erfährt im Gegenzug auch keinen Halt durch selbige. Während der Phlogistonchemiker eine zumindest grobe Vorstellung hat, wie weit sein Weltbild ihn trägt und wo seine Grenzen liegen, hat der (möglicherweise ebenso falsch liegende) Logiker eine solche Vorstellung nicht. Die Sorge um den einzig möglichen Krisenauslöser, den Widerspruch des Systemes in sich selbst, wird damit zum unabdingbaren Begleiter seiner wissenschaftlichen Tätigkeit. Man hätte diese Erkenntnis für die Mathematik wohl nicht schöner zum Ausdruck bringen können als Gödel durch die Unvollständigkeitssätze.

Die angewandte Mathematik dagegen steht in engem Verhältnis zu den Problemen, mit denen sich benachbarte Disziplinen wie etwa die Physik, die Chemie oder in antiker Zeit die Landvermesser befassen. Ihre Rolle ist dabei die (Weiter-) Entwicklung und Bereitstellung von Methoden sowohl für die Forschungs- als auch für die alltägliche Praxis. Der Anwendungsbezug stellt für diese Bereiche der Mathematik meiner Meinung nach einen Stützpfeiler dar, der sie letztlich von allen betrachteten Wissenschaften zu den krisenresistentesten macht. In Bezug auf Krisen durch eigene Widersprüchlichkeit kann jetzt tatsächlich mit Mehrtens argumentiert werden, dass die Mathematik eben funktioniert. Alle Bereiche der Mathematik, die eine erfolgreiche Anwendung besitzen, sind insofern krisensicher, als diese Anwendung aus pragmatischer Sicht indiskutabel ist. Dies ist mit Sicherheit einer der Gründe, warum sich der Intuitionismus seinerzeit trotz seiner Konsequenz und seines philosophischen Anspruchs nicht durchsetzen konnte - er hätte zu große Bereiche der Mathematik ersatzlos gestrichen. Trotz dieser Verbindung zur erfahrbaren Welt steht die angewandte Mathematik andererseits dennoch in keinem Spannungsverhältnis zu ihr, da sie von den Anomalien ihrer naturwissenschaftlichen Partner unberührt bleibt. Am Beispiel der Stochastik haben wir gesehen, dass Krisen der Mathematik eng mit Krisen korrespondierender Naturwissenschaften zusammenhängen können. Während die betroffene Naturwissenschaft sich dabei allerdings immer stärker mit der Tatsache konfrontiert sieht, dass ihre grundlegenden Ansichten falsch sind, verbleibt der mathematische Gegenpart in der Sicherheit, die ihm seine Künstlichkeit verleiht. Die mathematischen Methoden sind immer noch genauso richtig und im gleichen Rahmen erfolgreich wie zuvor. Nur ist dieser Rahmen möglicherweise für die Naturwissenschaft nicht mehr interessant. Die mathematische Krise äußert sich daher eher in Stagnation und Frustration darüber als in der Gefahr eines Zusammenbruchs und der Notwendigkeit einer radikalen Revolution. Es ist dieser feine Unterschied, der meiner Meinung nach die Gelassenheit erklärt, mit der die Mathematik ihren Problemen entgegentritt und allen Umsturzbewegungen trotzt, der aber auch ein neues Szenario aufwirft. Was, muss man fragen, geschieht nämlich, wenn ein Bereich der Mathematik lange Zeit in einer Stagnation verharrt und es keine Probleme mehr gibt, die seine Methoden erforderlich machen würden? In diesem Fall würden die in diesem Bereich tätigen Mathematiker sich wohl anderen Betätigungsfeldern zuwenden und das Interesse an dem Bereich allmählich verebben. Das Gegenstück zur Revolution wäre in diesem Fall das in Vergessenheit Geraten, vor dem ihrerseits die Naturwissenschaften resistenter sind. Denn im Gegensatz zu einem theoretischen Problem, das im Prinzip nach Belieben fallen gelassen werden kann, sind einmal entdeckte Naturphänomene fortwährend existent und bedürfen nach einer Erklärung. Es wäre eine interessante Aufgabe zukünftiger Arbeiten, diese These verschiedener "Schicksale" überholter Paradigmen in Mathematik und Naturwissenschaften näher zu prüfen.

So viel zu den "harten Fakten" hinter der Entstehung von Krisen und Revolutionen. Zum Schluss möchte ich noch einen Blickwinkel beleuchten, der in den bisherigen Arbeiten meines Erachtens zu kurz kam. Kuhn selbst schreibt, dass wissenschaftlicher Fortschritt im Nachhinein zumeist fälschlicherweise als eine stetige Abfolge aufeinander aufbauender Teilergebnisse dargestellt und die dahinter in Wahrheit steckende Folge revolutionärer Umbrüche dabei vertuscht wird. Möglicherweise unbeabsichtigt, stellt er Fortschritt damit nicht nur als real existierendes Forschungsobjekt, sondern auch als Wahrnehmungsphänomen dar. Als solches sollte er allerdings nicht nur Gegenstand der Frage sein, ob er nun faktisch Krise und Revolution enthält oder nicht, sondern auch, ob und unter welchen Umständen eine bestimmte wissenschaftliche Entwicklung als Krise bzw. Revolution aufgefasst wird. Aus den betrachteten Fallbeispielen können wir zwei interessante Thesen zu dieser Frage ableiten.

Der erste Punkt erschließt sich am Beispiel der Logik, wenn man genau beobachtet, wer dieses als Grundlagenkrise und als möglichen Gegenstand einer Revolution bezeichnet. Dies sind vor allem Weyl und Pourciau, die trotz dem langen Zeitraum zwischen ihren Werken eine wichtige Gemeinsamkeit haben: beide sind bekennende Verfechter des Intuitionismus, desjenigen der damals aufgekommenen Ansatzpunkte, von dem sich die Fachwelt insgesamt damals wie heute wohl am weitesten entfernt hat. Es ist sicher kein Zufall, dass solche "Underdogs" innerhalb einer Disziplin geneigt sind, deren Stand als brüchig, krisenhaft darzustellen und eine baldige Revolution in Aussicht zu stellen (die sie ja schließlich selbst vorbereiten). Man findet solche Muster übrigens auch vielerorts außerhalb der Wissenschaft wieder, etwa in der Politik, wo randständigen Parteien gerne das baldige Ende des Staates beschwören (sofern sie selbst nicht endlich mitgestalten können) oder in der Praxis religiöser Sekten, mit Weltuntergangsszenarien zu werben. Damit möchte ich den genannten Mathematikern keinesfalls Unwissenschaftlichkeit oder gar böse Absichten unterstellen, schließlich stehen diese mit bestem Gewissen hinter ihrer Arbeit und verfolgen hochinteressante Ansätze - nur eben nicht die geläufigen. Die Quintessenz dieses Vergleiches soll vielmehr sein, dass man bei der Ausrufung einer wissenschaftlichen Krise oder Revolution in jedem Fall auch die möglichen Motive dessen hinterfragen sollte, der die Aussage tätigt.

Zum Zweiten können auch Gründe zur Wahrnehmung einer Krise führen, die weniger in der Persönlichkeit einzelner als in gesamtgesellschaftlichen Aspekten zu suchen sind. So finden wir in der Zeit um die Jahrhundertwende des 19. zum 20. Jahrhunderts eine weitgreifende Stimmung der Unruhe und des Rufs nach Erneuerung vor, die nicht nur in großen Teilen der Wissenschaft bemerkbar ist. Zu Recht warnte Knorr damals davor, sich in der Darstellung der antiken Inkommensurabilität vom Zeitgeist zu einer verzerrten Sicht hinreißen zu lassen. Die Frage der Logik nach einer Fundierung der Mathematik wirkt zwar nicht stilisiert, doch könnte man sich durchaus vorstellen, dass auch diese mit geringerem Eifer und vor allem geringerer Sorge um den weiteren Verlauf der gesamten Mathematik hätte ablaufen können - schließlich war man sich ja damals bereits um die lange Erfolgsgeschichte der Mathematik bewusst. In diesem Licht erscheint die Frage angemessen, ob all die damaligen revolutionären Umbrüche, angefangen bei der Einsteinschen Revolution der Physik, über die beschriebenen Umbrüche in der Mathematik, bis hin zu den gesellschaftlichen Wirren, die letztlich zum Ersten Weltkrieg und der Revolution der europäischen Staatsordnungen führten, auf einen gemeinsamen Keim zurückführbar sind.

Wie wir sehen, lohnt es also Fragen nach mathematischem und insgesamt wissenschaftlichem Fortschritt nicht nur nach Art der "Sciences", sondern auch aus sozialwissenschaftlicher Perspektive zu stellen. In diesem Zuge sollte übrigens auch der Bereich betrachteter Fachdisziplinen erweitert werden, da bei aller Beschäftigung mit dem Lauf der Naturwissenschaften und der Mathematik die übrigen Geisteswissenschaften bisher eher außen vor gelassen wurden. Besonders die Mathematik als einer der Urväter der Wissenschaft und Vermittler zwischen Geistes- und Naturwissenschaften könnte von einer Ausdehnung der Wissenschaftstheorie in Richtung beispielsweise der Psychologie oder Soziologie nur profitieren und ihr Selbstverständnis vertiefen.

Als Zeitzeugen der noch nicht lange zurückliegenden Jahrtausendwende leben auch wir in einer Zeit des Wandels. Vor allem die rasante Ausbreitung des Internets in den letzten zehn Jahren formt unsere Welt in immer größerer Geschwindigkeit. Die Auswirkungen dieses Wandels sind nicht nur in nahezu allen Bereichen des alltäglichen Lebens, sondern auch in der Geschäftswelt, der Politik und nicht zuletzt der Wissenschaft nicht mehr zu übersehen: Ging man vor wenigen Jahrzehnten noch davon aus, dass die Flut wissenschaftlicher Veröffentlichungen bald nicht mehr beherrschbar, die Wissenschaft selbst handlungsunfähig wäre, sehen wir heute das Gegenteil. Moderne Suchmaschinen und Datenbanken ermöglichen eine umfassende Literatursuche innerhalb weniger Stunden, manchmal sogar Minuten durchzuführen und unser gesammeltes Wissen ist so einfach zugänglich wie nie zuvor. Ich bin daher davon überzeugt, dass die nächsten Jahre und Jahrzehnte einen überaus fruchtbaren Boden für verschiedenste wissenschaftstheoretische Forschungen liefern werden. Lassen wir uns überraschen, wie Wissenschaft und Fortschritt im 21. Jahrhundert aussehen werden.

2. Little Science - Big Science

2.1. Einleitung

Im ersten Teil dieser Arbeit wurde Fortschritt als in erster Linie als erkenntnistheoretisches Problem betrachtet. Das heißt, es wurde analysiert, wie und unter welchen Bedingungen Fortschritt aus Sicht der dabei gewonnenen Erkenntnisse verläuft. Für die Wissenschaftstheorie ist Fortschritt jedoch mehr als nur die Zunahme des Kenntnisstandes. Neben dieser Ebene kann Fortschritt in vielen anderen Dimensionen betrachtet werden, etwa

- räumlich, indem man die Ausbreitung des Fortschrittes und die Verteilung der Forscher über die Welt betrachtet
- zeitlich, indem man z.B. nach der Geschwindigkeit des Fortschritts fragt
- gesellschaftlich, indem man Augenmerk auf den Beruf des Wissenschaftlers und seine gesellschaftlichen Bedingungen legt

Man kann diese Punkte dahingehend zusammenfassen, dass sie nach den äußerlichen Rahmenbedingungen fragen, unter denen es zu dem Fortschritt kommt, wie wir ihn im vorigen Part kennen gelernt haben. Ein Meilenstein in dieser noch recht jungen Fragestellung ist - wie eingangs erwähnt - de Solla Price' *Little Science, Big Science.* Ausgehend von einer ausführlichen Analyse des wissenschaftlichen Fortschrittes seit etwa dem 16. Jahrhundert stellt Price hierin Gesetzmäßigkeiten und Zukunftsvorhersagen für das Wachstum der Wissenschaft auf. Mit seiner erfolgreichen Anwendung quantitativer, vor allem statistischer Methoden, beginnt Price damit erstmals wissenschaftstheoretische Konzepte messbar zu machen und begründet damit das Gebiet der Szientometrie. Bevor wir uns auch ihr aus mathematischer Sicht nähern, sollen zunächst Price' grundlegende Thesen kurz umrissen werden.

2.2. Little Science, Big Science (and beyond)

Price beschreibt in diesem 1963 erschienen Werk (eine revidierte Auflage mit dem Untertitel *and beyond* erschien 1986) einen grundlegenden Wandel des Wissenschaftsbetriebes: Ausgehend von der beschaulichen, "in der Studierstube betriebenen" Wissenschaftskultur der vergangenen Jahrhunderte entwickele die Wissenschaft sich zu einer sehr viel institutionalisierteren, großspurigeren und weltmännischeren Kultur, der Big Science bzw. Großforschung. Der Ausgangspunkt seiner Theorie ist die Betrachtung des Wissenschaftswachtums der westlichen Welt seit Beginn der Neuzeit. Price zeigt an Hand einiger Maßzahlen wie beispielsweise der Anzahl aktiver Wissenschaftler, dass das in diesem Zeitraum stattgefundene Wachstum exponential mit konstantem Wachstumsfaktor ist. Er stellt weiterhin fest, dass dieser Faktor, eine Verdoppelung alle 10 bis 20 Jahre, circa doppelt so schnell ist wie der vieler anderer gesellschaftlicher Maße, etwa der Bevölkerungszahl. Die erste Kernthese des Werkes ist daraus folgend, dass das Wachstum der Wissenschaft durch das ebenjener langsameren Maße prinzipiell begrenzt ist und daher einer Sättigungskurve folgen muss. Zweitens argumentiert Price anhand von Publikationszahlen und ähnlichen wissenschaftlichen Produktivitätsmaßen, dass der produktive Ausstoß der Wissenschaft gegenüber dem Einsatz an Geld und Arbeitskräften pareto-verteilt ist. Das heißt, dass ein Bruchteil der Wissenschaftler einen Großteil der wissenschaftlichen Leistungen vollbringt und umgekehrt der Großteil der Wissenschaftler nur wenig zum Fortschritt beisteuert. An Hand dieser beider Säulen, einer Wachstums- und einer Verteilungsanalyse der Wissenschaft, leitet Price schließlich den Wandel der Wissenschaft von Little zu Big ab. Sehr grob gefasst ist die Argumentationslinie dabei folgende: In dem Moment, wo sich das Wissenschaftswachstum dem Sättigungspunkt nähert, wird weiteres Wachstum zum einen unverhältnismäßig teuer (die Ausgaben für Wissenschaft haben jetzt die Höhe eines merklichen Anteils an der gesamten Volkswirtschaft erreicht), zum anderen fehlt der wissenschaftliche Nachwuchs, um alle möglichen Betätigungsfelder abzudecken. Aus dieser Ressourcenknappheit folgt das Konkurrieren verschiedener wissenschaftlicher Institutionen, welches letztlich

das Entstehen großer einflussreicher Wissenschaftszentren begünstigt. Auf die Deckung ihrer hohen Ausgaben und auf den Bruchteil hervorragenden Nachwuchses angewiesen, sind diese Großinstitute vergleichsweise stark an politischen und wirtschaftlichen Interessen sowie einer attraktiven Außendarstellung interessiert. Ähnlich der Bildung von Handelsmonopolen führt dies zu einem Sog, den diese Institute auf das wissenschaftliche Umland ausüben, sodass die Ressourcen kleinerer Institute regelrecht ausgetrocknet werden. Es entsteht dadurch ein Regelkreis und die Entwicklung zur Big Science verstärkt sich stetig selbst.
Der Wandel von Little zu Big wird damit nicht als Phänomen des Wissenschaftswachstums an sich, sondern als Konsequenz des Erreichens der Sättigung verstanden - Price vergleicht ihn demgemäß mit der Auskristallisation einer übersättigten Salzlösung. Big ist in diesem Sinne nicht die Wissenschaft selbst geworden, sondern verschiedene Merkmale innerhalb der Wissenschaft.
An Hand dieser Beobachtungen versucht Price in erster Linie die Gestalt der Wissenschaft im Zeitverlauf zu beschreiben und vorherzusagen. Er ist darin durchaus wertend, indem er die Großforschung aus verschiedenen Aspekten heraus kritisch sieht. Vor allem, so seine These, bestehe die Gefahr, dass durch die neuen Anreize für Wissenschaftler, die nicht mehr im Kenntnisgewinn allein liegen, sondern zunehmend wirtschaftlicher und politischer Art sind, kreatives Potential verloren gehe. So würden beispielsweise gewisse Projekte von vorneherein nicht mehr unterstützt, da sie keine unmittelbar praktischen Interessen bedienen; auch aus der Menge an Nachwuchswissenschaftlern wären es zukünftig eher die mit guter Außenwirkung als die wissenschaftlich erstklassigen, die besonders gefördert würden.
Wie sehen also, dass in dem betrachteten Themenkomplex Little vs. Big Science weit mehr als nur eine statistische Studie steckt. Vielmehr stellt Price' Werk eine Grundlage für eine ganze Reihe von Fragestellungen dar, die sich thematisch über die bloße Wissenschaftstheorie hinaus auch in gesellschaftspolitische Bereiche hinein erstrecken. In ähnlicher Weise wie im ersten Part wollen wir nun auch hier eine Betrachtung aus mathematischer Sicht vornehmen und prüfen, inwieweit die vorgestellten Konzepte der Betrachtung der Mathematik zu Grunde gelegt werden können. Zuerst ist es dazu von Nöten, eine präzise Definition von Little und Big Science bereitzustellen.

2.3. Begriffsdefinition

Price selbst umreißt zwar ein recht transparentes Bild der von ihm unterschiedenen Little und Big Science, bleibt eine exakte Definition aber schuldig. Die folgenden Punkt sind ein Versuch, die beiden Konzepte auf ihre wesentlichsten Eigenschaften zu reduzieren, um sie im Anschluss auf die Mathematik übertragen zu können.

Little Science

Der Begriff Little Science ist eine Bezeichnung für die Art des Wissenschaftsbetriebes, der in den letzten Jahrhunderten vorherrschte und der prinzipiell heute noch das geläufige Bild des Wissenschaftlers prägt. Diese Wissenschaft vollzieht sich vornehmlich an Universitäten und in privaten Forschungsstätten (zu Hause, in vergleichsweise kleinen Labors oder Werkstätten etc.). Ihre Akteure sind im Wesentlichen Einzelpersonen, die meist durch eine persönliche Fragestellung motiviert ein Fachgebiet beforschen und dabei Fortschritt produzieren. Wenn überhaupt, wird in kleinen Teams geforscht, die sich meist nicht viel weiter als auf die Arbeitsgruppe eines Universitätsprofessors erstrecken. Es verwundert daher nicht, dass die meisten wissenschaftlichen Durchbrüche dieser Ära auf die Arbeit einzelner hervorragender Wissenschaftler, wie etwa Newton oder Einstein, zurückgehen. Auch wenn diese Wissenschaft nicht zwangsweise klein im zahlenmäßigen Sinne ist (schließlich folgte auch sie einem mehrere Jahrhunderte andauernden exponentiellen Wachstum), stellt sie aus gesellschaftlicher Sicht doch eher eine Randerscheinung dar. Das Bild des Wissenschaftlers ist spitz gesagt das eines „schrulligen Kauzes“, der Tag und Nacht in seinem Kämmerchen über kryptischen Formeln brütet.

Big Science

Diesem Bild steht eine Wissenschaft gegenüber, wie sie sich etwa zwischen 1850 und 1950 entwickelte, die sich in einigen Punkten wesentlich unterscheidet:

- Budgets: Projekte der modernen Großforschung sind um ein Vielfaches kostenintensiver als vergleichbare frühere Forschungsvorhaben. Ihnen zu Grunde liegen meist aufwändige Finanzierungskonzepte, die Gelder aus öffentlicher Hand, aus verschiedensten Stiftungen sowie aus Industrie und Wirtschaft beinhalten.
- Teams: Großforschungsprojekte werden nicht mehr aus einer Hand geleitet, sondern stellen Kooperationen mehrerer, oft internationaler Teams dar. Neben den Universitäten sind zunehmend Forschungszentren Ort des Wissenschaftsbetriebes.
- technische Ausstattung: Die Gerätschaften, mit denen moderne Forschung vor allem im Bereich der Natur- und Ingenieurswissenschaften betrieben wird, sind hochkomplex und entsprechend aufwändig bzw. teuer in Anschaffung und Unterhalt. Die umfangreichen Finanzierungspläne und großen Forschungsnetzwerke sind damit allein dazu notwendig, um mit modernen Technologien forschen zu können.

Als eines der ersten Beispiele solcher Forschungskultur wird oft das Manhattan-Projekt genannt. Mit Kosten von etwa 2 Mrd US-$, zeitweise 100.000 Mitarbeitern und mehreren über das gesamte Staatsgebiet der USA verteilten Forschungsstationen stellte dieses Projekt zu seiner Zeit in allen genannten Punkten einen Superlativ dar. Während dies also die klassischen „Bigs“ sind, die der Großforschung ihren Namen verleihen, gibt es noch andere, eher qualitative Unterschiede, die sie zur klassischen Little Science aufweist:

- gesellschaftliche Rolle: Der gesellschaftliche Status der Wissenschaft im großen Maßstab hat sich fundamental gewandelt. Sie ist, nicht zuletzt durch die Abhängigkeit von ihren Geldgebern, eng mit Politik und Wirtschaft verflochten und verfolgt auch dementsprechende Ziele. Neben dem eigentlichen Forschen werden damit auch Public Relations und andere Tätigkeitsbereiche relevant, die klassischerweise eher für Unternehmen charakteristisch sind. Im Einzelnen ändert sich dadurch auch das Bild des Wissenschaftlers, für den in zunehmendem Maße soziale Fertigkeiten und Managementqualitäten Erfolgsgrundlage werden.
- Elitarismus: Wie aus der Theorie Price' folgt, ist es für ein Forschungsinstitut sehr schwer, weiter zu expandieren oder auch nur seine Stellung zu erhalten, denn die Sicherung von Drittmittelquellen und

dem Zugang zu qualifiziertem Nachwuchs ist eine ständige Herausforderung. Um der Paretoverteilung dieser Güter entgegenzuwirken, muss ein renommiertes Institut sich ständig „nach unten hin“ abgrenzen: Da es nicht möglich ist, beliebig viele Forschungskräfte einzustellen, um mehr Projekte zu verfolgen, so muss das Interesse daran liegen, nur die besten Nachwuchskräfte einzustellen und nur die erfolgversprechendsten Projekte zu verfolgen. Daraus folgt ein Motiv zur Elitenbildung, das man heutzutage in vielen Bereichen der Wissenschaft feststellen kann, so z.B. im Exzellenzcluster, in restriktiven Zugangsvoraussetzungen zu Masterstudiengängen oder in den exorbitant hohen Kosten wissenschaftlicher Journale.

Mit diesen Punkten haben wir nun eine Reihe an Stützpfeilern gesammelt, anhand derer wir eine Analyse der Mathematik wagen können.

2.4. Big Science in der Mathematik?

Bei Betrachtung der oben aufgeführten „Bigs“, also Gelder, Forschungsgruppen und Maschinen, denkt man wohl zuerst an zahlreiche Beispiele moderner naturwissenschaftlicher und technischer Forschung, etwa an physikalische Projekte mit Teilchenbeschleunigern, an medizinische Institute mit Hochleistungstomographen oder an internationale Raumstationen. Anders dagegen sieht es im Bereich der Geisteswissenschaften aus, wo man vergleichbare Beispiele eher suchen muss als dass sie dem Betrachter ins Auge springen.

Ähnlich wie bei Kuhn könnte die Mathematik daher auch hier eine Sonderrolle einnehmen, indem sich unterschiedlich ausgerichtete Teilgebiete der Mathematik in der Ausprägung der Bigs unterschieden. Intuitiv lautet meine Hypothese, dass man in der techniklastigeren angewandten Mathematik mehr und stärkere Indizien für den Einzug der Big Science finden wird als in den Sparten der reinen Mathematik.

Um diese Hypothese prüfen zu können, ist es wichtig die identifizierten Charakteristika von Little und Big Science derart zu operationalisieren, dass man einen Vergleich von mathematischen und anderen wissenschaftlichen Fachdisziplinen vornehmen kann. Es gilt also aus dem täglichen Wissenschaftsbetrieb Maßzahlen herzuleiten, anhand derer sich Bereiche von Klein- und Großforschung trennen lassen und die insbesondere in mathematischen Arbeitsbereichen erhoben werden können.

2.5. Kriterien

Man findet eine Vielzahl von Korrelaten wissenschaftlicher Tätigkeit, die prinzipiell als Quelle solcher Kriterien nutzbar sind. Die innerhalb der Scientometrics wohl am intensivsten genutzte Quelle stellen wissenschaftliche Veröffentlichungen dar. In der Tat scheinen diese prädestiniert zu sein, um daraus strukturelle Aussagen über die Wissenschaft abzuleiten. Zum einen ist das Niederschreiben und Veröffentlichen eigener Forschungsresultate ein Grundprinzip wissenschaftlicher Tätigkeit, ohne das Wissenschaft nicht denkbar ist. Prinzipiell kann man daher sagen, dass Publikationsanalysen Zugang zur Gesamtheit des wissenschaftlichen Wirkens ermöglichen (man beachte jedoch die unterschiedlichen Medien, mittels derer Fachdisziplinen ihre Resultate vornehmlich veröffentlichen). Zweitens findet man in einer Publikation viele relevante Informationen auf einem Punkt vereinigt, so etwa über das Themengebiet, die veröffentlichenden Autoren, den Zusammenhang zu anderen Arbeiten usw. - mit groß angelegten

Datenbankanalysen kann daraus eine breite Palette unterschiedlicher Sachverhalte abgeleitet werden (Gauffriau et al., 2007). Drittens und letztens liegt es im Wesen einer Veröffentlichung, dass diese Daten gewollt transparent und leicht zugänglich sind. Dies macht die reliable Gewinnung großer Datenmengen relativ problemlos möglich.

Im Folgenden sollen daher einige Möglichkeiten entworfen bzw. vorgestellt werden, wie man vorwiegend mit Hilfe von Publikationslisten und Journalrecherchen auf das Vorhandensein von Little und Big Science schließen kann.

2.5.1. Citation Indices

Ein wichtiges Werkzeug in der Bibliometrie sind Maßzahlen, die auf Basis von Zitierungen gewonnen werden. Der bedeutendste Index in diesem Bereich ist der Impact Factor (IF). Der IF einer wissenschaftlichen Fachzeitschrift wird jedes Jahr definiert als die durchschnittliche Anzahl, wie oft ihre Artikel der vergangenen beiden Jahre in diesem Jahr zitiert wurden. In erster Linie als Maß für die wissenschaftliche Bedeutung eines Journals gedacht, wird dieser Wert für eine Vielzahl anderer Kategorisierungen verwendet, etwa der Bedeutung einzelner Wissenschaftler (durch Summation der IFs der Journals, in denen sie veröffentlichen) oder gar ganzer Nationen. Wie man sieht, liegen die Anwendungsbereiche des IFs meist in der Erstellung von Rangordnungen – ein Grund, warum er vielfach kritisch betrachtet wird (Radicchi et al., 2008). So werden hier Werturteile über die Güte von Forschung auf einer rein quantitativen Basis getroffen, ohne jegliche Aussage über die Qualität und die tatsächliche Bedeutsamkeit der gezählten Artikel. Dies lässt nicht nur den Nutzen des Impact Faktors in Frage stehen, sondern weckt auch die Sorge, dass die Qualität der wissenschaftlichen Arbeit selbst beeinflusst werden könnte. Man findet diesen Gedanken z.B. in der Debatte um Salamipublikationen, d.h. die Praxis Forschungsergebnisse unnötigerweise auf mehrere Veröffentlichungen aufzuteilen, wieder (Bornmann & Daniel, 2007). Ein verwandtes Problem sind Selbstzitierungen bzw. befreundete Forschungsgruppen, die ihren Impact durch überflüssiges gegenseitiges Zitieren künstlich befördern. Schließlich lässt sich noch feststellen, dass die Zitierungszahlen nicht zeitstabil sind (mit der Zeit wird immer mehr zitiert) und, an dieser Stelle besonders relevant, dass der Impact Factor nicht interdisziplinär vergleichbar ist. Während einzelne Journals z.B. in medizinisch ausgerichteten Fachgebieten IFs von bis zu 50 erreichen, gibt es andere Fachbereiche, in denen selbst die höchsten Werte einstellig bleiben. Ausgerechnet die Mathematik bildet hier von allen Fachdisziplinen das Schlusslicht mit 2.55 als höchstem IF eines mathematischen Journals. Einer der Gründe dafür ist die unterschiedliche Langlebigkeit von Ergebnissen in den verschiedenen Disziplinen. So zeigt Bornmann, dass durch die ausschließliche Betrachtung der jeweils vergangenen zwei Jahre in der Mathematik 90% aller Zitierungen nicht vom IF berücksichtigt werden – ein Ergebnis, was für die bedächtige und krisenresistente Mathematik nicht anders zu erwarten gewesen wäre.

All diese Punkte lassen am IF als objektivem Maß für die Wichtigkeit von Wissenschaftlern, Communities, Journals etc. mit Recht Zweifel aufkommen. Für unsere Belange macht es ihn aber gerade interessant, da ich hinter vielen der hier angesprochenen Probleme Sachverhalte vermute, die hochgradig mit Phänomenen der Big Science zusammenhängen. So weist die Problematik der Mehrfachveröffentlichungen und

Selbstzitierungen deutlich auf ein starkes Bedürfnis der veröffentlichenden Autoren hin, ihren persönlichen Impact so hoch wie nur möglich zu treiben. Der Grund dafür liegt meines Erachtens nicht nur im angeborenen Ehrgeiz des Menschen, sondern auch in den äußerst handfesten Konsequenzen eines hohen oder niedrigen Impact Factors, z.B. dem Erlangen von Grants, um die konkurriert wird. Mit diesem Punkt sind wir bereits beim Kern der priceschen Big Science angelangt, für die sowohl Prestigehunger als auch die Notwendigkeit Gelder zu erwirtschaften, charakteristisch sind.

Man könnte im IF daher nicht nur ein Maß für tatsächliche wissenschaftliche Bedeutung bzw. Produktivität, sondern auch für das Geltungsbedürfnis (bzw. die Notwendigkeit dazu) der beteiligten Forscher zu sehen. In diesem Sinne haben wir mit dem Impact Factor eines Fachbereiches (gewonnen etwa durch Durchschnittsbildung der in diesen Bereich gehörenden Journale) bereits einen fundierten Anhaltspunkt für dessen Standpunkt zwischen Little und Big gefunden.

Auf die Mathematik angewandt, können wir damit die eingangs gestellte Hypothese, dass die angewandte Mathematik „größer" als die reine ist, bestätigen: Es wurde dazu eine Analyse von insgesamt 401 Journals (197 der reinen, 204 der angewandten Mathematik zugeordnet, siehe Anhang 1) vorgenommen, wobei als Datenquelle die ISI Web of Science-Datenbank (http://isiwebofknowledge.com; zuletzt abgerufen: 16.5.2011) diente. Bezüglich des 2009er IF weisen die reinen Journals einen Mittelwert von 0.742, die angewandten einen signifikant höheren ($t = -4.05$, $p<0.001$) Mittelwert von 0.979 auf.

Klar ist aber auch, dass dieser Unterschied verschwindend gering ist im Vergleich zum Unterschied der Mathematik als Ganzes zu anderen Fachbereichen. Insgesamt müsste man also in erster Linie zu dem Schluss gelangen, dass die Mathematik (noch) Little ist.

2.5.2. Autorenanzahl

Ein alternativer, ebenfalls in der Publikationsanalyse begründeter Ansatzpunkt ist die Analyse von Autorenschaften. Auch dieser Ansatz wurde bereits erfolgreich betrieben, um z.B. wissenschaftliche Communities zu identifizieren (Gauffriau et al., 2007). Eines der Bigs der Großforschung ist, wie wir gesehen haben, die Größe von Kollegien, die an einem Projekt arbeiten. Gerade wenn diese Kollegien sich über mehrere Standorte erstrecken, sollte man erwarten, dass ein jedes sich mit mindestens einem Autor in einer Veröffentlichung der Ergebnisse repräsentiert sehen will. Ein Big Science betreibender Fachbereich sollte sich demgemäß durch eine durchschnittlich höhere Anzahl an Autoren pro Journalartikel auszeichnen. Die Tatsache, dass die Autorenanzahl pro Veröffentlichung mit dem Impact Factor korreliert ist (Radicchi et al., 2008) gibt diesem Argument weiteres Gewicht.

Bei der Analyse der Zitierungen haben wir festgestellt, dass die Mathematik ungeachtet von rein oder angewandt eher der Little Science zuzurechnen ist. Um dieses Ergebnis zu überprüfen, wurden nun Veröffentlichungslisten zweier mathematischer und eines naturwissenschaftlichen Institutes im Zeitraum von 2006 bis 2010 erstellt und verglichen. Es wurden dazu der Fachbereich Mathematik der Ludwig-Maximilians-Universität München und das Max-Planck-Institut Bonn als mathematisches Forschungszentrum herangezogen. Den naturwissenschaftlichen Vertreter stellte das Max-Planck-Institut für Hirnforschung in Frankfurt. Den Internetseiten dieser Institute wurden alle aufgelisteten Veröffentlichungen der Jahre 2006 bis

2010 entnommen und deren Autorenzahlen zusammengetragen; dabei wurden nur Veröffentlichungen in Fachbüchern und wissenschaftlichen Journals berücksichtigt. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist in Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1. Anzahl Veröffentlichungen dreier Institute im Zeitraum 2006-2010 nach Autorenzahl

	1	2	3	4	5+
MPI Bonn	399	319	112	31	4
LMU München	104	107	88	24	7
MPI Frankfurt	12	4	12	24	51

Man erkennt hier klar, dass bei mathematischen Veröffentlichungen einzeln oder zu zweit veröffentlichte Arbeiten den Großteil ausmachen, währenddessen in dem naturwissenschaftlichen Institut der Großteil der Veröffentlichungen eine Autorenschaft von vier oder mehr Autoren aufweist. Das MPI Frankfurt erfüllt damit ganz unsere Erwartung an ein großes Institut mit ausgedehnten Kooperationen, während hingegen das MPI Bonn dem kleinen mathematischen Institut der LMU deutlich ähnlicher ist als seinem großforschenden Kollegen. Auch auf Basis dieser Erhebung müsste man also zu dem Schluss gelangen, dass die Mathematik generell Little ist. Man sollte dieses Ergebnis jedoch mit Vorsicht betrachten, da es mit nur drei verglichenen Instituten eher eine beispielhafte Momentaufnahme darstellt. Eine ausreichend umfassende Untersuchung mit dieser Methode dagegen wäre ungleich aufwändiger als mit dem Impact Factor. Während nämlich die Gesamtzahl an Journals gut überschaubar ist, ist die Menge an zu betrachtenden Veröffentlichungen alles andere als das. Das Erstellen einer repräsentativen Stichprobe, die nicht durch die Publikationsgewohnheiten einzelner Journale, Arbeitsgruppen oder ähnliches verzerrt ist, wird damit sowohl methodisch als auch vom Arbeitsaufwand her zu einer anspruchsvollen Aufgabe. Unter Einsatz umfangreicher Datenbanksysteme, wie sie in der szientometrischen Forschung gängig ist, könnte sich die Autorzahl aber durchaus als valides Mittel zur Bestimmung von Little und Big eignen.

2.5.3. Andere Größen

Mit dem Impact Factor und der Autorenzahl von Veröffentlichungen haben wir zwei potenzielle Maßzahlen für eine Einordnung wissenschaftlicher Bereiche zwischen Little und Big Science identifiziert. Inhaltlich basieren sie vor allem auf den Bigs Ressourcenaufwand (indem aus der Konkurrenz um knappe Mittel die Notwendigkeit folgt sich unter anderem mit dem Impact aus der Masse hervorzuheben) und Teamgröße (als unmittelbares Korrelat der Autorenzahl). Neben den eigentlichen Bigs wurden noch weitere Unterscheidungskriterien in der gesellschaftlichen Rolle der Wissenschaft vermutet. Da diese Merkmale verglichen mit den Bigs eher qualitativer Art sind, ist es hierfür schwerer, messbare Indikatoren in Publikationslisten o.ä. zu finden. Um sich der Big Science von diesem Standpunkt aus zu nähern, erscheinen mir daher den Sozialwissenschaften entlehnte Methoden wie etwa strukturierte Interviews am vielversprechendsten. Eine solche Analyse, optimalerweise in Verbindung mit den oben genannten quantitativen Untersuchungen, wäre vor allem dann sinnvoll, wenn man über die Identifikation von Big Science hinaus noch an tiefergehenden Aussagen über die Bedeutung dieses Wandels interessiert ist.

2.6. Diskussion

Bei der Betrachtung naturwissenschaftlich-technischer Forschung der letzten 50 Jahre wird es offenkundig, dass Price' strukturelle Vorhersagen eingetroffen sind: Kein in diesem Bereich tätiger Forscher wird die Bedeutung von Grants, internationalen Kooperationen, dem Zugang zu teuren High-tech-Geräten und –labors etc. leugnen. Ob dieser Wandel von der "Studierstube" zur Großforschung auch in der Mathematik angekommen ist, erscheint nach den hier angestellten Überlegungen und Untersuchungen jedoch fraglich. Zweifelsohne steht die Mathematik, vor allem ihre angewandten Bereiche, in enger Nachbarschaft zu den Big angelegten Fachdisziplinen. Die mathematische Forschung selbst scheint jedoch vergleichsweise unberührt von dem dortigen Wandel des Wissenschaftsbetriebes zu sein und zumindest in den von uns betrachteten Indizien nach wie vor in kleinem Maßstab Wissenschaft zu betreiben.

Mir erscheint dieses Ergebnis plausibel, wenn man sich nur noch einmal den Entstehungszusammenhang der Big Science vor Augen führt: Sie stellt vor allem eine notwendige Reaktion der Wissenschaft auf die Beschränktheit ihrer Ressourcen dar. In Punkten wie dem Bedarf nach qualifiziertem Nachwuchs oder den steigenden Kosten moderner wissenschaftlicher Infrastruktur (PC-Arbeitsplätze, Kongressreisen etc.) trifft das grundsätzlich auf alle wissenschaftlichen Disziplinen zu. Ein entscheidender Faktor aber, die Kostenexplosion der technischen Ausstattung, ist in der Mathematik im Vergleich zu den meisten ihrer Nachbarwissenschaften wenig präsent. Nicht nur braucht mathematischer Fortschritt keine Großgeräte; der in den Ingenieurwissenschaften herrschende "Dinosaurierismus" ("Groß, größer, am größten: wachsen um jeden Preis") behindert in der Mathematik sogar den wissenschaftlichen Fortschritt, da selbiger hier nur durch intensives Nachdenken in einem ungestörten Umfeld der Muße möglich ist.

Kurzum: Das im priceschen Sinne notwendige Übel Big Science erscheint in der Mathematik nicht ganz so notwendig wie in anderen Fachdisziplinen, dementsprechend langsamer vollzieht sich hier der Wandel. Aus dieser Überlegung folgt aber auch, dass der Wandel sich tatsächlich vollzieht und großforschungstypische Merkmale früher oder später auch in der Mathematik zu erwarten sind. Die Frage nach Big Science in der Mathematik kann damit nur für den Moment beantwortet werden und sollte daher weiterhin Gegenstand wissenschaftstheoretischer Untersuchungen sein.

Gemeinsames Fazit

Damit sind wir am Ende der Arbeit angelangt: Mit den Theorien Kuhns und Price' wurde die eingangs gestellte Frage nach den Eigenschaften wissenschaftlichen Fortschrittes von zwei verschiedenen Standpunkten aus beleuchtet. Während Kuhn mit seiner Theorie wissenschaftlicher Revolutionen und Paradigmenwechseln die inneren Zusammenhänge wissenschaftlichen Fortschrittes betrachtet, setzen Price' Beobachtungen an den äußerlichen Rahmenbedingungen der Wissenschaft und ihres Fortschrittes an.

Im Kern scheinen dabei beide Theorien vor allem die Entwicklung der Naturwissenschaften und der Technik zu beschreiben. Das Ziel dieser Arbeit war es daher, diese Konzepte gezielt auf die Mathematik anzuwenden und sie dadurch mit anderen wissenschaftlichen Disziplinen zu vergleichen. Wir sind zu dem Schluss gekommen, dass beide Modelle prinzipiell auch für mathematische Problemstellungen anwendbar sind, die Mathematik dabei aber eine Sonderstellung einnimmt. War es bei Kuhn eine gewisse Krisenresistenz, die der Mathematik attestiert werden konnte, so scheint sie sich bei Price dem sonst omnipräsenten Wandel der Wissenschaft zur Big Science hin zu entziehen. Im Grundton sind das äußerst ähnliche Ergebnisse, deren Gemeinsamkeit eine merkliche Resilienz der Mathematik gegenüber dem Wandel der Wissenschaftswelt ist, der sich innerhalb des letzten Jahrhunderts vollzogen hat. Zusammenfassend liegt diese Eigenschaft darin begründet, dass die Mathematik zum einen eine sehr alte und dementsprechend reife Wissenschaft ist, deren über Jahrtausende gewachsene Methoden mit viel Bedacht auf den wissenschaftlichen Zeitgeist reagieren. Zum anderen profitiert die Mathematik sowohl innerlich wie auch äußerlich von der Grundlegung im menschlichen Geist, die sie unabhängig von vielen realen Umständen wie etwa widersprüchlichen Naturphänomenen oder notwendigen Versuchsgeräten macht.

Aus diesen Erkenntnissen wird deutlich, dass die hier angestellten Überlegungen wertvolle Methoden geliefert haben mathematischen Fortschritt zu analysieren. Darüberhinaus haben wir Vergleichspunkte gewonnen, an Hand derer die Mathematik in Bezug zu anderen Wissenschaften gesetzt werden kann und deren Anwendung letztlich zu einem tieferen Selbstverständnis der Mathematik führen könnte.

Literatur

Allgemein

Bird, A. (2007). What Is Scientific Progress? *Nous, 41* (1), 64-89.

Huber, H. (2010). Wissenschaftlicher Fortschritt und sein Kriterium. http://www.gavagai.de/arbeiten/HHP76.htm (zuletzt abgerufen: 26.4.2011).

Poser, H., 2001. *Wissenschaftstheorie – Eine philosophische Einführung*, Stuttgart: Philipp Reclam jun.

Teil 1

Crowe, M. (1975). Ten "Laws" Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics. *Historia Mathematica, 2*, 162-166.

Dauben, J. (1984). Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge. In: Gillies, D. (Hrsg.), 1992. *Revolutions in Mathematics*, New York: Oxford University Press, 49–71.

Dunmore, C. (1992). Meta-level revolutions in mathematics. In: Gillies, D. (Hrsg.), 1992. *Revolutions in Mathematics*, New York: Oxford University Press, 209–225.

von Fritz, K., 1945. The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum, *The Annals of Mathematics, Second Series, 46* (2), 242-264.

Gillies, D. (Hrsg.), 1992. *Revolutions in Mathematics*, New York: Oxford University Press.

Knorr, W.R., 2001. The Impact of Modern Mathematics on Ancient Mathematics, *Revue d'histoire des mathematiques, 7*, 121–135.

Kuhn, T. S. (1970). *The Structure of Scientific Revolutions (2nd edition)*, Chicago: University of Chicago Press.

Mehrtens, H. (1976). T.S. Kuhn's Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the "New Historiography" of Mathematics. *Historia Mathematica, 3*, 297-320.

Pourciau, B. (2000). Intuitionism as a (Failed) Kuhnian Revolution in Mathematics. *Studies in History and Phiosophy of Science, 31* (2), 297-329.

Shafer, G., Vovk, V. (2006). The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe. *Statistical Science, 21* (1), 70-98.

Teil 2

Bornmann, L., Daniel, H.D. (2007). Multiple Publication on a Single Research Study: Does It Pay? The Influence of Number of Research Articles on Total Citation Counts in Biomedicine. *Journal of the American Society for Information Science and Technology, 58* (8), 1100–1107.

Gauffriau, M., Larsen, P.O., Maye, I., Roulin-Perriard, A., von Ins, M. (2007). Publication, cooperation and productivity measures in scientific research. *Scientometrics, 73* (2), 175–214.

de Solla Price, D.J. (1963). *Little Science, Big Science.* New York: Columbia University Press.

Radicchi, F., Fortunato, S., Castellano, C. (2008). Universality of citation distributions: Toward an objective measure of scientific impact. *PNAS*, *105* (45), 17268–17272.

Anhang

Anhang 1a: Zeitschriften der angewandten Mathematik mit Impact Factor 2009

Abbreviated Journal Title	Impact Factor	Abbreviated Journal Title	Impact Factor
ABSTR APPL ANAL	2,221	J COMPLEXITY	1,227
ACM T MATH SOFTWARE	1,904	J COMPUT ANAL APPL	0,697
ACM T MODEL COMPUT S	0,684	J COMPUT APPL MATH	1,292
ACTA APPL MATH	0,523	J COMPUT MATH	0,848
ACTA MATH APPL SIN-E	0,315	J CRYPTOL	2,297
ACTA MATH SIN	0,579	J DIFFER EQU APPL	0,748
ADV APPL CLIFFORD AL	0,447	J DYN CONTROL SYST	0,377
ADV APPL MATH	0,931	J DYN DIFFER EQU	1,24
ADV COMPUT MATH	1,354	J EUR MATH SOC	1,736
ADV DIFFER EQU-NY	0,892	J EVOL EQU	0,918
ADV MATH COMMUN	0,847	J FIX POINT THEORY A	0,605
ADV NONLINEAR STUD	0,739	J FOURIER ANAL APPL	1,534
ALGEBR COLLOQ	0,38	J FUNCT SPACE APPL	0,583
ALGORITHMICA	0,917	J GEOM PHYS	0,714
ANAL APPL	1,282	J GLOBAL OPTIM	1,454
ANN COMB	0,679	J HYPERBOL DIFFER EQ	0,638
ANN I H POINCARE-AN	1,298	J INEQUAL APPL	0,792
ANN MAT PUR APPL	0,901	J KOREAN MATH SOC	0,374
ANN MATH ARTIF INTEL	0,893	J MATH ANAL APPL	1,225
ANN PURE APPL LOGIC	0,667	J MATH IMAGING VIS	1,437
ANZIAM J	0,286	J MATH PURE APPL	1,68
APPL ALGEBR ENG COMM	0,525	J MATH SCI-U TOKYO	0,172
APPL ANAL	0,613	J MOD DYNAM	1,019
APPL COMPUT HARMON A	1,854	J NONCOMMUT GEOM	1,296
APPL COMPUT MATH-BAK	0,633	J NONLINEAR CONVEX A	0,585
APPL MATH COMPUT	1,124	J NONLINEAR SCI	1,816
APPL MATH LETT	0,978	J NUMER MATH	0,6
APPL MATH MECH-ENGL	0,393	J OPTIMIZ THEORY APP	0,996
APPL MATH OPT	0,757	J PURE APPL ALGEBRA	0,6
APPL MATH-CZECH	0,41	J SCI COMPUT	1,707
APPL NUMER MATH	1,279	J SYMB COMPUT	0,853
ASIAN J MATH	0,362	JPN J IND APPL MATH	0,353
ASYMPTOTIC ANAL	0,777	KINET RELAT MOD	0,933
B SCI MATH	0,464	LINEAR ALGEBRA APPL	1,073
BALK J GEOM APPL	0,765	LOG J IGPL	0,32
BANACH J MATH ANAL	0,328	MATH COMP MODEL DYN	0,594
BIT	0,648	MATH COMPUT	1,598
BOUND VALUE PROBL	1,068	MATH COMPUT MODEL	1,103
CALC VAR PARTIAL DIF	0,931	MATH COMPUT SIMULAT	0,946
CHAOS	1,795	MATH METHOD APPL SCI	0,808
COLLECT MATH	0,389	MATH METHOD OPER RES	0,522
COMMUN CONTEMP MATH	0,836	MATH MOD METH APPL S	2,095
COMMUN MATH SCI	0,982	MATH OPER RES	1,054

COMMUN PART DIFF EQ	1,218	MATH PHYS ANAL GEOM	0,733
COMMUN PUR APPL ANAL	0,918	MATH PROGRAM	2,048
COMMUN PUR APPL MATH	2,657	MEDITERR J MATH	0,492
COMP GEOM-THEOR APPL	1,459	MILAN J MATH	1,062
COMPEL	0,46	MOSC MATH J	0,712
COMPLEX ANAL OPER TH	0,712	NODEA-NONLINEAR DIFF	0,67
COMPUT AIDED GEOM D	1,33	NONLINEAR ANAL-REAL	2,381
COMPUT MATH APPL	1,192	NONLINEAR ANAL-THEOR	1,487
COMPUT OPTIM APPL	1,264	NONLINEARITY	1,258
CRYPTOLOGIA	0,229	NUMER ALGORITHMS	0,716
DESIGN CODE CRYPTOGR	0,825	NUMER FUNC ANAL OPT	0,625
DIFFER GEOM APPL	0,669	NUMER LINEAR ALGEBR	1,054
DISCRETE APPL MATH	0,816	NUMER MATH	1,614
DISCRETE CONT DYN S	1,205	NUMER MATH-THEORY ME	0,696
DISCRETE CONT DYN-B	0,803	NUMER METH PART D E	1,196
DISCRETE EVENT DYN S	0,921	OPEN SYST INF DYN	0,935
DISCRETE MATH THEOR	0,414	OPTIM CONTR APPL MET	1,021
DISCRETE OPTIM	0,729	OPTIM LETT	0,926
DYNAM PART DIFFER EQ	1,032	OPTIM METHOD SOFTW	0,866
DYNAM SYST	0,653	OPTIMIZATION	0,616
DYNAM SYST APPL	0,5	P AM MATH SOC	0,64
ELECTRON J COMB	0,605	P ROY SOC EDINB A	0,694
ELECTRON J QUAL THEO	0,471	PERIOD MATH HUNG	0,315
ELECTRON T NUMER ANA	0,567	PHYSICA D	1,568
ERGOD THEOR DYN SYST	0,822	PMM-J APPL MATH MEC+	0,36
ESAIM CONTR OPTIM CA	1,084	PROBL INFORM TRANSM+	0,393
ESAIM-MATH MODEL NUM	1,483	PURE APPL MATH Q	0,415
EUR J APPL MATH	1,054	Q APPL MATH	0,958
FINITE ELEM ANAL DES	1,262	Q J MECH APPL MATH	1,073
FINITE FIELDS TH APP	0,779	RANDOM STRUCT ALGOR	1,162
FIXED POINT THEOR-RO	0,7	REGUL CHAOTIC DYN	0,725
FIXED POINT THEORY A	1,525	RELIAB COMPUT	0,68
FORUM MATH	0,702	REND SEMIN MAT U PAD	0,311
FOUND COMPUT MATH	1,905	RESULTS MATH	0,513
FUNCT ANAL APPL+	0,289	REV MAT COMPLUT	0,739
FUND INFORM	0,615	REV SYMB LOGIC	0,345
FUNKC EKVACIOJ-SER I	0,634	RUSS J NUMER ANAL M	0,485
FUZZY SET SYST	2,138	SCI CHINA SER A	0,584
HOMOL HOMOTOPY APPL	0,609	SEL MATH-NEW SER	0,828
IMA J APPL MATH	0,701	SET-VALUED ANAL	0,545
IMA J MATH CONTROL I	0,535	SIAM J APPL DYN SYST	1,786
IMA J NUMER ANAL	1,824	SIAM J APPL MATH	1,639
INFIN DIMENS ANAL QU	0,464	SIAM J COMPUT	1,614
INFORM COMPUT	1,225	SIAM J CONTROL OPTIM	1,546
INFORMATICA-LITHUAN	1,04	SIAM J DISCRETE MATH	0,668
INT J AP MAT COM-POL	0,684	SIAM J MATH ANAL	1,649
INT J COMPUT GEOM AP	0,392	SIAM J MATRIX ANAL A	2,411

INT J COMPUT MATH	0,478	SIAM J NUMER ANAL	1,84
INT J NONLIN SCI NUM	5,276	SIAM J OPTIMIZ	1,429
INT J NUMER ANAL MOD	0,822	SIAM J SCI COMPUT	1,595
INT J ROBUST NONLIN	1,906	SIAM REV	3,391
INTEGR TRANSF SPEC F	0,756	STOCH ANAL APPL	0,405
INTERFACE FREE BOUND	0,938	STUD APPL MATH	1,525
INVERSE PROBL	1,9	TOPOL APPL	0,441
INVERSE PROBL IMAG	1,831	TRANSPORT THEOR STAT	0,172
IRAN J FUZZY SYST	0,421	UTILITAS MATHEMATICA	0,589
J ALGEBRA APPL	0,443	Z ANAL ANWEND	0,371
J ALGORITHMS	0,444	Z ANGEW MATH PHYS	1,092
J COMB OPTIM	0,867	ZAMM-Z ANGEW MATH ME	0,866

Anhang 1b: Zeitschriften der reinen Mathematik mit Impact Factor 2009

Abbreviated Journal Title	**Impact Factor**	**Abbreviated Journal Title**	**Impact Factor**
ABH MATH SEM HAMBURG	0,391	ISR J MATH	0,754
ACTA ARITH	0,508	IZV MATH+	0,635
ACTA MATH HUNG	0,522	J ALGEBR COMB	1,137
ACTA MATH SCI	0,328	J ALGEBRA	0,632
ACTA MATH-DJURSHOLM	2,619	J ALGEBRAIC GEOM	1,543
ADV GEOM	0,386	J AM MATH SOC	3,411
ADV MATH	1,403	J ANAL MATH	0,633
ALGEBR COLLOQ	0,38	J APPROX THEORY	0,904
ALGEBR GEOM TOPOL	0,624	J AUST MATH SOC	0,348
ALGEBR LOG+	0,479	J COMB DES	0,709
ALGEBR REPRESENT TH	0,516	J COMB THEORY A	0,783
ALGEBR UNIV	0,245	J COMB THEORY B	1,155
AM J MATH	1,337	J CONVEX ANAL	0,813
AM MATH MON	0,339	J DIFFER EQUATIONS	1,426
ANN ACAD SCI FENN-M	0,539	J DIFFER GEOM	1,239
ANN GLOB ANAL GEOM	1,036	J EUR MATH SOC	1,736
ANN I FOURIER	0,904	J FIX POINT THEORY A	0,605
ANN MATH	4,174	J FUNCT ANAL	1,247
ANN POL MATH	0,567	J GEOM ANAL	0,646
ANN SCI ECOLE NORM S	1,074	J GRAPH THEOR	0,662
ANN SCUOLA NORM-SCI	1,08	J GROUP THEORY	0,471
APPL CATEGOR STRUCT	0,548	J INST MATH JUSSIEU	0,979
ARCH MATH	0,373	J K-THEORY	0,618
ARCH MATH LOGIC	0,349	J KNOT THEOR RAMIF	0,523
ARK MAT	0,455	J LIE THEORY	0,346
ARS COMBINATORIA	0,396	J LOND MATH SOC	0,798
ASTERISQUE	0,372	J MATH KYOTO U	0,533
B AM MATH SOC	3,294	J MATH LOG	0,353
B AUST MATH SOC	0,302	J MATH SCI-U TOKYO	0,172
B BELG MATH SOC-SIM	0,592	J MATH SOC JPN	0,52

B BRAZ MATH SOC	0,359	J NONCOMMUT GEOM	1,296
B IRAN MATH SOC	0,207	J NUMBER THEORY	0,507
B KOREAN MATH SOC	0,272	J OPERAT THEOR	0,58
B LOND MATH SOC	0,757	J REINE ANGEW MATH	1,079
B MALAYS MATH SCI SO	0,341	J SYMBOLIC LOGIC	0,631
B MATH SOC SCI MATH	0,554	J SYMPLECT GEOM	0,815
B SOC MATH FR	0,4	J TOPOL	0,886
B SYMB LOG	0,694	JPN J MATH	1,071
BANACH J MATH ANAL	0,328	K-THEORY	0,692
CALC VAR PARTIAL DIF	0,931	KODAI MATH J	0,267
CALCOLO	0,767	KYUSHU J MATH	0,463
CAN J MATH	0,596	LECT NOTES MATH	0,718
CAN MATH BULL	0,355	LINEAR MULTILINEAR A	0,74
CENT EUR J MATH	0,361	LITH MATH J	0,486
CHINESE ANN MATH B	0,356	MANUSCRIPTA MATH	0,663
COMB PROBAB COMPUT	0,645	MATH ANN	1,198
COMBINATORICA	0,871	MATH INEQUAL APPL	0,493
COMMENT MATH HELV	0,938	MATH INTELL	0,483
COMMUN ALGEBRA	0,42	MATH LOGIC QUART	0,523
COMMUN ANAL GEOM	0,691	MATH MODEL ANAL	0,602
COMMUN PART DIFF EQ	1,218	MATH NACHR	0,653
COMMUN PUR APPL MATH	2,657	MATH NOTES+	0,337
COMPLEX ANAL OPER TH	0,712	MATH PROC CAMBRIDGE	0,598
COMPOS MATH	1,246	MATH RES LETT	0,677
COMPUT COMPLEX	1,188	MATH SCAND	0,485
CONSTR APPROX	1,594	MATH SLOVACA	0,308
CR MATH	0,529	MATH Z	0,895
CZECH MATH J	0,306	MEM AM MATH SOC	2,24
DIFF EQUAT+	0,339	MICH MATH J	0,581
DISCRETE COMPUT GEOM	0,935	MONATSH MATH	0,764
DISCRETE MATH	0,548	NAGOYA MATH J	0,492
DISS MATH	0,235	NUMER LINEAR ALGEBR	1,054
DOC MATH	0,81	OPER MATRICES	0,603
DOKL MATH	0,162	ORDER	0,408
DUKE MATH J	1,758	OSAKA J MATH	0,414
ELECTRON J COMB	0,605	P EDINBURGH MATH SOC	0,75
ELECTRON J LINEAR AL	0,892	P INDIAN AS-MATH SCI	0,382
ELECTRON RES ANNOUNC	1,036	P JPN ACAD A-MATH	0,25
EUR J COMBIN	0,822	P LOND MATH SOC	1,049
EXP MATH	0,545	PAC J MATH	0,576
EXPO MATH	0,673	POSITIVITY	0,417
FIXED POINT THEOR-RO	0,7	POTENTIAL ANAL	0,753
FORUM MATH	0,702	PUBL MAT	0,432
FUNCT ANAL APPL+	0,289	PUBL MATH-DEBRECEN	0,646
FUND MATH	0,607	PUBL MATH-PARIS	1,692
GEOM FUNCT ANAL	1,313	PUBL RES I MATH SCI	0,624
GEOM TOPOL	1,587	Q J MATH	0,656

GEOMETRIAE DEDICATA	0,661	QUAEST MATH	0,267
GEORGIAN MATH J	0,353	RACSAM REV R ACAD A	0,425
GLASGOW MATH J	0,629	RAMANUJAN J	0,705
GRAPH COMBINATOR	0,571	REND SEMIN MAT U PAD	0,311
GROUP GEOM DYNAM	0,75	REV MAT COMPLUT	0,739
HACET J MATH STAT	0,128	REV MAT IBEROAM	0,687
HIROSHIMA MATH J	0,26	ROCKY MT J MATH	0,26
HIST MATH	0,367	RUSS MATH SURV+	0,425
HOUSTON J MATH	0,474	SB MATH+	0,468
ILLINOIS J MATH	0,296	SEL MATH-NEW SER	0,828
INDAGAT MATH NEW SER	0,157	SEMIGROUP FORUM	0,597
INDIAN J PURE AP MAT	0,333	SIBERIAN MATH J+	0,475
INDIANA U MATH J	0,913	STUD MATH	0,645
INT J ALGEBR COMPUT	0,483	STUD SCI MATH HUNG	0,229
INT J MATH	0,608	T AM MATH SOC	1,06
INT J NUMBER THEORY	0,318	TAIWAN J MATH	0,633
INT MATH RES NOTICES	0,68	THEOR COMPUT SYST	0,726
INT MATH RES PAP	0,647	TOHOKU MATH J	0,667
INTEGR EQUAT OPER TH	0,477	TOPOL METHOD NONL AN	1,193
INTERFACE FREE BOUND	0,938	TOPOLOGY	0,816
INVENT MATH	2,794	TRANSFORM GROUPS	0,789
ISR J MATH	0,754	TURK J MATH	0,108

Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Martin Ziegler, der mir dieses interessante Thema vorgeschlagen und mich in allen Phasen der Arbeit exzellent betreut hat. Für meine Fragen hatte er jederzeit ein offenes Ohr und konnte mir mit hilfreichen Ratschlägen zur Seite stehen.

Herrn Prof. Dr. Alfred Nordmann danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferats und für die fruchtbaren Anregungen, die ich von ihm im Logikseminar bekommen habe.

Außerdem bedanke ich mich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Ralf Galuske, der es mir ermöglicht hat, neben meiner Promotion mein Mathematikstudium zu beenden.

Zu guter Letzt noch ein großes Dankeschön an meine Freundin Yvonne, die diese Arbeit mehrfach Korrektur gelesen und die schrecklichsten meiner Formulierungen entsorgt hat.

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit ohne Hilfe Dritter und ohne Verwendung anderer als der angeführten Quellen angefertigt zu haben, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat.

Arne Seehaus, Darmstadt, 23.5.2011